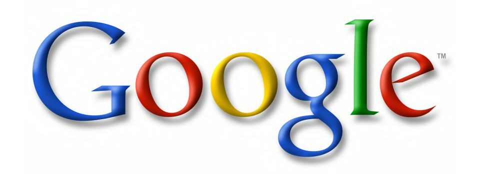
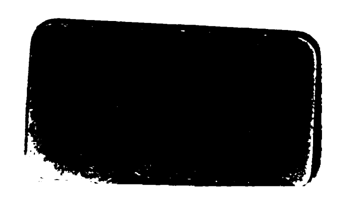



SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE
RI
TS



VORLESUNGEN

ÜBER

DIE COMPLEXEN ZAHLEN

UND

IHRE FUNCTIONEN

VON

DR. HERMANN HANKEL.

IN ZWEI THEILEN.

I. THEIL.

THEORIE DER COMPLEXEN ZAHLENSYSTEME.

LEIPZIG,
LEOPOLD VOSS.
1867.

THEORIE

DER

COMPLEXEN ZAHLENSYSTEME

INSBESONDERE

DER GEMEINEN IMAGINÄREN ZAHLEN

UND

DER HAMILTON'SCHEN QUATERNIONEN

NEBST

IHRER GEOMETRISCHEN DARSTELLUNG

VON

DR. HERMANN HANKEL.

LEIPZIG,
LEOPOLD VOSS.
1867.

VORREDE.

Das Werk, dessen erster Theil hier vorliegt, ist aus der Absicht hervorgegangen, das, häufig als „Theorie der Functionen complexer Variabeler" bezeichnete, neue Gebiet der Mathematik, welches von Gauss und Cauchy zuerst betreten, dann von Riemann in glanzvoller Weise bebaut worden ist, in seinen wesentlichen und fundamentalen Theilen vollständig und streng wissenschaftlich darzustellen.

Es galt, zunächst einen Ausgangspunkt in dem Begriffe der complexen Zahl zu gewinnen. Eine Umschau in der Literatur überzeugte mich bald, dass einerseits viele Mathematiker die Frage in ihrer Bedeutung und Wichtigkeit gänzlich verkennen, und sie in der oberflächlichsten Weise mit einem Raisonnement erledigen zu können glauben, welches an Begriffsverwirrung seines Gleichen sucht (s. unten S. 14), und dass andererseits der Gesichtskreis der Schriftsteller, welche die Frage ernstlicher angreifen, meistens ein zu beschränkter ist, als dass er zur Beantwortung dieser tief liegenden Frage ausreichte.

Wie überhaupt die Entwickelung mathematischer Begriffe und Vorstellungen historisch zwei entgegengesetzte Phasen zu durchlaufen pflegt, so auch die des Imaginären. Zunächst erschien dieser Begriff als paradox, streng genommen unzulässig, unmöglich; indess schlugen die wesentlichen Dienste, welche er der

Wissenschaft leistete, im Laufe der Zeit alle Zweifel an seiner Legitimität nieder und es bildete sich die Ueberzeugung seiner inneren Wahrheit und Nothwendigkeit in solcher Entschiedenheit aus, dass die Schwierigkeiten und Widersprüche, welche man anfangs in ihm bemerkte, kaum noch gefühlt wurden. In diesem zweiten Stadium befindet sich die Frage des Imaginären heut zu Tage; — indessen bedarf es keines Beweises, dass die eigentliche Natur von Begriffen und Vorstellungen erst dann hinreichend aufgeklärt ist, wenn man unterscheiden kann, was an ihnen nothwendig ist, und was arbiträr, d. h. zu einem gewissen Zwecke in sie hineingelegt ist. Nur die Determination von höheren und die Vergleichung mit coordinirten Begriffen liefert eine genügende Definition. Wollte ich daher den Begriff der gemeinen imaginären Zahlen von Grund aus feststellen, so war ich gezwungen, auf Untersuchungen über complexe Zahlen im Allgemeinen (VI. Abschnitt) einzugehen, und neben jenen älteren complexen Zahlen, zum factischen Beweise der Möglichkeit von Zahlen, deren Einheiten nicht allen Gesetzen der „arithmetica universalis“ *) folgen, wenigstens einige abweichende Zahlensysteme zu behandeln. Ich habe deshalb im VIII. und IX. Abschnitt die Theorie der Quaternionen Sir W. R. Hamilton's, die in England allgemein bekannt und gebraucht, in Deutschland aber bisher fast ganz unbekannt geblieben sind, dargestellt, und glaubte mich dabei nicht nur auf das für den angezogenen Zweck nöthigste beschränken zu müssen, sondern mir den Dank vieler Mathematiker zu verdienen, wenn ich diese Theorie vollständig entwickelte und zugleich an einigen Beispielen ihre Fruchtbarkeit und leichte Anwendbarkeit darlegte. Auch einem anderem complexen Systeme, welches an Sachgemässheit und Brauchbarkeit mit dem Hamilton'schen wetteifert, und

*) Ich nehme dies Wort im Folgenden überall in dem durch Newton's gleichnamiges Werk bekannten Sinne.

welches ich das alternirende nenne, glaubte ich im VII. Abschnitt einen, wenn auch kleineren Raum zugestehen zu sollen.

Eine gründliche Untersuchung des Wesens der arithmetischen Operationen und der Zahl in dem gegenseitigen nothwendigen Zusammenhange dieser beiden Begriffe zeigte sich als durchaus nothwendig, wenn man den Begriff der complexen Zahlensysteme etwas tiefer erfassen wollte. So sind die Abschnitte I bis IV der vorliegenden Schrift entstanden. Nachdem im I. Abschnitte die Mangelhaftigkeit der vulgären Begründung des Begriffes der Zahlen und der vier Species gezeigt und das hodegetische Princip der Permanenz der formalen Gesetze aufgestellt ist, wird im II. Abschnitte die Natur von Operationen, welche in ihren formalen Bedingungen denen der arithmetica universalis nachgebildet sind, ausführlich untersucht. *)

Im III. und IV. Abschnitte ist die Natur der ganzen, gebrochenen, rationalen und irrationalen reellen Zahlen und Grössen, zum ersten Male, wie mir scheint, von einem höheren und allgemeineren Gesichtspunkte strenge und systematisch dargestellt. Dass es dabei nothwendig war, zuweilen in Betrachtungen einzugehen, welche „der Metaphysik des Calculs“ angehörig, sich in ihrer Form von den meisten rein mathematischen Deductionen einigermassen unterscheiden, liegt auf der Hand. Für diejenigen Leser aber, welche an dergleichen Untersuchungen weniger Interesse nehmen, bemerke ich, dass auch ohne die Lectüre des III. und IV. Abschnittes (und der damit zusammenhängenden

*) Ich habe in den §§. 4 und 5 nur ungern eine etwas schwerfällige Bezeichnung der Operationen angewandt, und lange geschwankt, ob ich den Schein des Abstrusen, welchen diese für das folgende unentbehrlichen Untersuchungen annehmen könnten, nicht dadurch vermeiden sollte, dass ich statt des Zeichens $\Theta(a, b)$ für eine thetische Verknüpfung mich des übersichtlicheren $(a + b)$ bediente. Indess hat der Umstand, dass sich an letzteres Zeichen gar zu leicht die gewohnten Vorstellungen anknüpfen, schliesslich den Ausschlag zu Gunsten der im Texte angewandten Bezeichnung gegeben.

Entwickelungen auf S. 26—28) alles folgende ohne Weiteres verständlich sein wird. Wie ich dort gezeigt habe, kann der Begriff der Zahl rein formal und ohne Rücksicht auf den der Grösse gefasst werden; letzterer tritt nur hinzu als anschauliches Substrat jener Formen. Ich habe daher auch durchgehends „complexe Zahl“ statt des gebräuchlicheren Ausdrucks „complexe Grösse“ geschrieben, was ich sogleich an diesem Orte anführe, um die Meinung, als ob es sich in vorliegendem Werke um die ganzen complexen Zahlen im Sinne der eigentlichen Zahlenlehre handele, von vornherein zu dementiren. —

In der geometrischen Darstellung der gemeinen und höheren complexen Zahlen sowie ihrer Operationen habe ich mich durchaus der allgemeinen Vorstellungen über den Sinn von Strecken, Winkeln, Flächenräumen und Körperinhalten bedient, wie sie Möbius zuerst consequent angewandt hat. Diese Principien geben den Formeln und Sätzen eine von allen speciellen Lagen-Verhältnissen durchaus unabhängige und deshalb höchst elegante Gestalt, die man, einmal an sie gewöhnt, nur sehr ungern vermisst. Man muss es bedauern, dass dieselben noch so wenig allgemeine Verbreitung gefunden haben, wie denn z. B. Hamilton's Schriften über die Quaternionen (s. unten S. 195) in der älteren Form geschrieben sind. Dass in dieser manche Untersuchungen völlig ungeniessbar werden können, davon dürfte die Darstellung Hamilton's an nicht wenigen Stellen seiner „Lectures“ (z. B. S. 218 u. ff.) ein eindringliches Beispiel sein. Diejenigen Leser, welche mit der Möbius'schen Form der sphärischen Trigonometrie u. s. w. nicht völlig vertraut sind, verweise ich auf die „Elemente der Mathematik“ von R. Baltzer. —

In dem vorliegenden I. Theile habe ich mich auf die Entwickelung der Grundeigenschaften der verschiedenen Zahlensysteme beschränkt, d. h. auf die vier Fundamentaloperationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die zur

vollständigen Charakterisirung des Wesens jener Systeme nothwendig und hinreichend sind.

Der II. Theil dieses Werkes wird die Theorie der Functionen complexer Veränderlicher enthalten und zwar gedenke ich auch hier die Grundbegriffe streng und eingehend zu begründen, soweit dies bei dem heutigen Stande der Wissenschaft möglich sein wird. Ich werde mich fast ausschliesslich auf die Functionen gemeiner complexer Veränderlicher beschränken und ausser den Grundlehren, dem Dirichlet'schen Principe, dem Taylor'schen Satze u. s. w., besonders die Theorie der Integrale mit complexen Integrationswegen, die hypergeometrische Reihe, die elliptischen und, soweit es der Raum gestattet, die Abel'schen Functionen behandeln. Doch wird auch die Theorie der Functionen von Quaternionen gebührende Berücksichtigung finden.

Die Darstellung einer fundamentalen Disciplin, wie die hier behandelte, wird jederzeit nicht sowohl grosse Kenntnisse in den höchsten Theilen der Mathematik, als vielmehr eine gewisse Empfänglichkeit und Vorurtheilslosigkeit, überhaupt einen denkenden Leser voraussetzen müssen. Solche Leser werden vorliegende Schrift nicht nach aphoristischer Lecture einzelner Stellen, welche aus dem Zusammenhange gerissen, leicht fremdartig erscheinen oder unverständlich bleiben können, beurtheilen. Gerade die Leichtigkeit, mit welcher sich der scheinbar so heterogene Stoff den systematischen Ideen fügte, welche als rother Faden Alles durchziehen und der consequente Zusammenhang aller einzelnen Theile, ist mir die sicherste Garantie für die Richtigkeit und Angemessenheit meines, von dem gewöhnlichen zuweilen wesentlich abweichenden Gedankenganges gewesen.

In den Naturwissenschaften zeigt sich in neuester Zeit das entschiedene Streben, aus der Welt des empirischen Details zu den grossen Principien aufzusteigen, welche alles Einzelne beherrschen und unter höheren Gesichtspunkten zu einem Ganzen

vereinigen: das Streben nach einer, nicht von aussen octroyirten, sondern aus der Sache selbst fliessenden Philosophie der Natur. Auch auf dem Gebiete der Mathematik scheint sich ein verwandtes Bedürfniss, das in England stets rege gewesen ist, in unseren Tagen immer allgemeiner geltend zu machen. Der Wunsch, dies Bedürfniss zu erwecken und wenigstens in einem gewissen Umkreise zu befriedigen, hat auf mich bei Abfassung des vorliegenden Werkes einen wesentlichen Einfluss ausgeübt.

Universität Leipzig,
9. Mai 1867.

Dr. Hermann Hankel.

INHALTSVERZEICHNISS.

VI. Abschnitt. **Die höheren complexen Zahlen.**

VII. Abschnitt. **Theorie und geometrische Darstellung der alternirenden Zahlen.**

VIII. Abschnitt. **Reine Theorie der Quaternionen.**

IX. Abschnitt. **Geometrische Darstellung der Quaternionen.**

ERSTER ABSCHNITT.

Exposition.

Reine Theorie, auf was für Objecte sie sich auch beziehen mag, hat überall die Aufgabe, deductiv aus gegebenen Relationen neue Beziehungen abzuleiten, die allerdings in den vorausgesetzten enthalten und mit ihnen gleichzeitig gesetzt sind, deren Erkenntniss aber infolge der Natur des menschlichen Geistes einen wissenschaftlichen Fortschritt begründet. Die rein formalen Wissenschaften, Logik und Mathematik, haben solche Relationen zu behandeln, welche unabhängig von dem bestimmten Inhalte, der Substanz der Objecte sind oder es wenigstens sein können. Der Mathematik fallen in's Besondere diejenigen Beziehungen der Objecte zu einander zu, die den Begriff der Grösse, des Maasses, der Zahl involviren. Ueberall, wo diese Begriffe anwendbar sind, kann und wird Mathematik ohne ihren Charakter zu verändern eintreten, da sie unabhängig von den verglichenen Objecten und Substanzen selbst, rein jene Relationen der Grösse, des Maasses und der Zahl mit einander verknüpft.

§. 1.

Die ganzen Zahlen und ihre thetischen Verbindungen.

Was es heisst, ein Object 1 mal, 2 mal, 3 mal ... denken oder setzen, kann bei der principiellen Einfachheit des Begriffes der Setzung (Position) nicht definirt werden. Eine absolute, ganze Zahl 1, 2, 3 ... sagt aus, es solle ein Object 1, 2, 3 ... mal gesetzt werden, und es bedeutet $1e$, $2e$, $3e$ ..., das Resultat der wiederholten Position von e. Jenes Object, welches willkührlich bleibt, kann Ein-

heit genannt und an seine Stelle die absolute, numerische Einheit gesetzt werden, die man mit 1 bezeichnet. Man setzt dann 1.1, 2.1, 3.1... einfach gleich 1, 2, 3, ... und drückt so durch die Zahlzeichen zwei verschiedene, wenn auch nahe verwandte Begriffe aus. In der ersten Beziehung sind 1, 2, 3, ... Cardinalzahlen, indem sie das „wie oft" der Position bezeichnen und eine Forderung enthalten, in der zweiten sind sie Ordinalzahlen, welche die Stelle einer gewissen Vielheit in der geordneten Zahlenreihe und das Resultat der Verknüpfung von Einheiten bezeichnen. Entsprechend diesen beiden Bedeutungen gibt es zwei Verknüpfungsweisen der Zahlen.

Addition. Denkt man sich die numerische Einheit a mal, dann b mal gesetzt, und fasst diese Setzungen in eins zusammen, so nennt man das Resultat die Summe der einzelnen Setzungen $(a + b)$. Die Addition zweier Zahlen besteht in demselben Processe, der zu ihrer Erzeugung selbst geführt hat und man sieht, dass die Summe und damit auch das zu ihrer Bezeichnung angewandte Symbol $+$ den beiden Hauptgesetzen:

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

$$a + b = b + a$$

unterliegen, von denen das erste als das der Associativität, das zweite als das der Commutativität bezeichnet wird. Die Addition ist eine eindeutige Operation, d. h. das Resultat der Addition $(a + b)$ ist ein bestimmtes; sie hat ferner die Eigenschaft, dass wenn ein Summand seinen Werth ändert, während der andere constant bleibt, dann sich jedesmal das Resultat der Operation ändert. Die hier angegebenen Eigenschaften der Addition sind ausreichend, um aus ihnen alle weiteren Folgerungen über Summenbildung abzuleiten, ohne dass man sich jemals dabei der realen Bedeutung der Addition erinnern müsste. Sie bilden insofern das System der Bedingungen, welche nöthig und ausreichend sind, um die Operation formal zu definiren.

Multiplication. Die Multiplication besteht in der Verknüpfung einer Ordinalzahl b mit einer Cardinalzahl a und verlangt, dass b a mal genommen werden soll. Das Resultat dieser Operation, das Product $a . b$ kann auch als diejenige Zahl angesehen werden, welche aus b auf dieselbe Weise hervorgeht, wie a aus der numerischen

Einheit. Bilden wir jetzt ein Product durch b maliges Vervielfachen der Ordinalzahl a, so ist es keineswegs selbstverständlich, sondern bedarf eines Beweises, dass

$$a.b = b.a$$

also das commutative Gesetz gilt. Dieser Beweis kann durch eine im Grunde geometrische Construction in einer Ebene ebenso leicht geführt werden*, als im Raume der Beweis für das associative Gesetz:

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

wobei man darauf achten mag, dass bald von dem ordinalen, bald von dem cardinalen Begriffe der Zahl Gebrauch gemacht wird.

Die Multiplication hängt ihrem Begriff nach mit der Addition eng zusammen, denn es ist allgemein:

$$(b+c)\,a = b\,a + c\,a,\; a\,(b+c) = a\,b + a\,c;$$

— eine Eigenschaft, welche man die distributive** nennt. Fügen wir noch hinzu, dass $1\,a = a$ ist und die Multiplication hinsichtlich der Eindeutigkeit ebenso beschaffen ist wie die Addition, so hat man ihre fundamentalen Eigenschaften erschöpft, und mit diesen zugleich ihre formale Definition gegeben.

Potenzirung. Die Potenzirung ist eine Operation, welche aus der Multiplication ebenso hervorgeht, wie diese aus der Addition. Unter a^b versteht man den Factor a, b mal gesetzt. Was die Gesetze dieser Operation betrifft, so findet das commutative Princip nicht statt, denn a^b ist von b^a im Allgemeinen verschieden; auch das associative Gesetz nicht, denn es ist

$$a^{(b^c)} \text{ von } (a^b)^c$$

verschieden. Es ist aber

$$(a)^{bc} = (a^b)^c$$
$$(b\,c)^a = b^a\,c^a$$
$$a^{b+c} = a^b\,a^c$$

* Vergl. Lejeune-Dirichlet, Vorl. über Zahlentheorie. 1863. S. 1.

** Diese Namen sind in England seit 1840 vollkommen eingebürgert und ich habe daher nicht Anstand genommen, sie auch auf deutschen Boden zu verpflanzen; „distributiv“ und „commutativ“ sind von Servois eingeführt worden (Gergonne's Ann. Bd. V. 1814, S. 93), „associativ“ wahrscheinlich zuerst von Sir W. R. Hamilton.

und diese Gleichungen repräsentiren das distributive Princip bei dieser Operation.

Die Wiederholung der Potenzirung liefert wieder eine neue Operation. Nimmt man nämlich zunächst a, welches auch mit a_1 bezeichnet werden kann, und erhebt es auf die $a_1$te Potenz, so erhält man a^a, welches etwa als a_2 bezeichnet werden möge. Erhebt man dann a auf die $a_2$te Potenz und nennt das Resultat a_3, so dass

$$a_3 = a^{a_2} = a^{(a^a)}$$

$$a_4 = a^{a_3} = a^{\left(a^{(a^a)}\right)}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so erhält man allgemein a_b als eine neue Operation, deren weitere Untersuchung sich indess bis jetzt in der Wissenschaft nicht als nothwendig erwiesen hat.

§. 2.

Die lytischen Operationen, Erweiterung des Begriffes der Zahlen.

Die vorstehenden Operationen nenne ich thetische im Gegensatze zu den lytischen, welche durch Umkehrung aus ihnen hervorgehen.

Subtraction. Negative Zahlen. In einer Gleichung $a + b = c$ war bisher die Summe c aus den beiden als bekannt vorausgesetzten Gliedern a, b abgeleitet. Man kann jetzt fragen, welchen Werth muss x haben, damit $x + b = c$. Nach den oben bemerkten Eigenschaften der Summe gibt es nur Einen Werth von x, für welchen $x + b = c$, und den man mit $x = b - c$ bezeichnet.

Die Operation, welche x aus $x + b = c$ finden lehrt, heisst Subtraction, und ist keine andere, wenn man $b + x = c$ als die aufzulösende Gleichung ansieht.

Man hat hienach die Identität oder die zur Definition des Zeichen — dienende Gleichung

$$(c - b) + b = c$$

und kann alle bekannten Rechnungsregeln, welche sich auf die additive und subtractive Verbindung von Zahlen beziehen, mit Hülfe dieser Gleichung und der angegebenen Eigenschaften der Addition ableiten.

Es liegt auf der Hand, dass es, wenn $b > c$ ist, keine Zahl x in der Reihe 1, 2, 3, ... gibt, welche die betreffende Aufgabe löst: die Subtraction ist dann unmöglich. Nichts hindert uns jedoch, dass wir in diesem Falle die Differenz $(c - b)$ als ein Zeichen ansehen, welches die Aufgabe löst und mit welchem genau so zu operiren ist, als wenn es eine numerische Zahl aus der Reihe 1, 2, 3 ... wäre.

Die der Variabilität von b und c wegen scheinbar doppelte Reihe von Zahlen, welche so entsteht, kann leicht auf eine einfache zurückgeführt werden: denkt man sich eine Zahl 0, welche die Eigenschaft hat, dass $a + 0 = a$ sei, was auch a bedeute, so hat man $a - a = 0$, und schreibt man nun statt $0 - a$ einfach $-a$, so kann $c - b = -a$ gesetzt werden.

Indem wir so neue negative Zahlen einführen, welche sich durch die Vorsetzung des —, von den bisher allein betrachteten, durch Position eines Objectes entstandenen, positiven Zahlen unterscheiden, müssen wir offenbar den Begriff der Zahl, wie er oben gefasst wurde, erweitern. Es kann dies etwa geschehen, indem wir eine Zahl definiren als das Zeichen der Forderung einer Operation, welche an einem irgend welchen Objecte vorzunehmen ist und zugleich als das aus der Erfüllung jener Forderung Resultirende, wenn jenes Object durch die numerische Einheit ersetzt wird. So bedeutet 3 oder + 3 die 3malige Position eines Objectes, 0 die absolute Aufhebung der Position, die man etwa sich so hergestellt denken kann, dass man ein Object zunächst 1 mal setzt und dann diese Setzung wieder aufhebt, so dass 0 kein Object dieser Art bezeichnet. Man sieht aber nicht, wie unter — 3 eine reale Substanz verstanden werden kann, wenn das ursprünglich gesetzte Object eine solche ist, und würde im Rechte sein, wenn man — 3 als eine nicht reelle, imaginäre Zahl als eine „falsche" bezeichnete. „Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist. Genau besehen, findet diese Voraussetzung nur da Statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände) sondern Relationen zwischen je zweien Gegenständen das Gezählte sind. Postulirt wird dabei, dass diese Gegenstände auf eine

bestimmte Art in eine Reihe geordnet sind, z. B. $A, B, C, D \ldots$, und dass die Relation des A zu B als der Relation des B zu C u. s. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter als der Umtausch der Glieder der Relation, so dass wenn die Relation (oder der Uebergang von A zu B) als $+1$ gilt, die Relation von B zu A als -1 dargestellt werden muss. Insofern also eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentirt jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Gliede der Reihe."* So sieht man, dass die Operation, als deren Ausdruck wir vorhin eine Zahl ansahen, darin besteht, zwei Objecte (Substanzen) unter einander in Beziehung zu setzen und obige Erklärung der Zahl wird daher jetzt so gefasst werden können:

Die Zahl ist der begriffliche Ausdruck der gegenseitigen Beziehung zweier Objecte, soweit dieselbe quantitativen Messungen zugänglich ist.

Die eigentlich quantitativen Resultate solcher Messungen finden ihre Darstellung überall in den absoluten ganzen Zahlen; wenn aber eine Zahl so beschaffen ist, dass sie mehrere solche absolute Zahlen als Elemente enthält, so heisst sie eine zusammengesetzte oder complexe Zahl, die durch ihre Zusammensetzung zugleich angibt, in welcher Weise diese quantitativen Verhältnisse an den Objecten und ihrer Relation zur Erscheinung kommen.

Will man die häufig gestellte Frage beantworten, ob eine gewisse Zahl möglich oder unmöglich sei, so muss man sich zunächst über den eigentlichen Sinn dieser Frage klar werden. Ein Ding, eine Substanz, die selbstständig ausserhalb des denkenden Subjectes und der sie veranlassenden Objecte existirte, ein selbstständiges Princip, wie etwa bei den Pythagoreern, ist die Zahl heute nicht mehr. Die Frage von der Existenz kann daher nur auf das denkende Subject oder die gedachten Objecte, deren Beziehungen die Zahlen darstellen, bezogen werden. Als unmöglich gilt dem Mathematiker streng genommen nur das, was logisch unmöglich ist, d. h. sich selbst widerspricht. Dass in diesem Sinne unmögliche Zahlen nicht

---

* Gauss, Werke, Bd. II, S. 176 in dem Aufsatze von 1831.

zugelassen werden können, bedarf keines Beweises. Sind aber die betreffenden Zahlen logisch möglich, ihr Begriff klar und bestimmt definirt und also ohne Widerspruch, so kann jene Frage nur darauf hinaus kommen, ob es im Gebiete des Realen oder des in der Anschauung Wirklichen, des Actuellen ein Substrat derselben, ob es Objecte gebe, an welchen die Zahlen, also die intellectuellen Beziehungen der bestimmten Art zur Erscheinung kommen. In diesem Sinne konnte man, wenn hier ein im Folgenden weiter zu erläuterndes Beispiel anticipirt wird, die aus $\sqrt{-1}$ zusammengesetzten Zahlen solange unmögliche nennen, als man keinerlei anschauliche Darstellung derselben kannte, und gibt es noch heute Zahlen dieser Art. Nachdem aber die Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ eine geometrische Darstellung gefunden haben, und ihre Operationen geometrisch gedeutet worden sind, kann man in keiner Weise dieselben als unmögliche bezeichnen; sie sind ganz von derselben Realität als die positiven und negativen Zahlen, wenn auch letztere zahlreichere Substrate in der Anschauung finden, und in vielen Fällen im Wirklichen dargestellt oder möglich gemacht werden können, wo die in der Zahl $a + b\sqrt{-1}$ ausgesprochene Beziehung nicht realisirt werden kann.

Um aller Unklarheit der Begriffe, die so leicht aus der Unbestimmtheit der Benennung hervorgeht, zu entgehen, wird man gut thun, solche Zahlen, deren Begriff ein vollkommen bestimmter ist, die aber einer irgend welchen Construction in der Anschauung nicht fähig sind, transscendente, rein mentale, rein intellectuelle oder r e i n f o r m a l e zu nennen im Gegensatz zu den a c t u e l l e n*) Zahlen, welche in der Lehre von den wirklichen Grössen und ihrer Verknüpfung ihre Repräsentation finden. Solche Zahlen, welche zwischen beiden in der Mitte stehen, von denen man eine vollständige Definition geben, aber im Allgemeinen und von vornherein nicht wissen kann, ob sie einer anschaulichen Darstellung unterzogen werden können, mag man potentielle nennen, insofern sie zu actuellen gemacht werden können, oder intellectuelle, mentale, insofern sie zunächst nur gedacht aber nicht angeschaut werden sollen, oder

*) Die zur Bezeichnung dieser beiden Klassen geeignetsten Namen des Idealen und Realen haben leider schon eine bestimmte engere Bedeutung.

formale schlechthin, insofern in ihnen nur eine gewisse formale Beziehung zum Ausdrucke kommt. Dass dieser Gegensatz zwischen den transscendenten und actuellen Zahlen in seiner Vermittelung durch die formalen Zahlen, kein starrer, sondern ein fliessender ist, wird sich im Folgenden klar genug herausstellen.

Division und gebrochene Zahlen. Die Lysis der multiplicativen Thesis, die Division schliesst die Reihe der arithmetischen Fundamentaloperationen, der 4 Species, zu der wir die Addition, Subtraction, Multiplication, Division zählen, ab. Die Anwendung dieser 4 Species auf irgend welche Zahlen nennt man „rechnen."

Die Division besteht in der Aufgabe, aus einer Gleichung

$$x . a = b$$

das x zu bestimmen, wenn a, b ganze Zahlen sind. Es leuchtet ein, dass es nicht immer möglich ist, das x, sowie es bis jetzt zulässig ist, als ganze Zahl zu bestimmen. Soll also die Division unter jeder Bedingung möglich gemacht werden, so müssen wir unser Zahlengebiet erweitern und in dasselbe neue Zahlen aufnehmen, welche durch:

$$x = \frac{b}{a}$$

bezeichnet werden, so dass

$$\frac{b}{a} a = b$$

ihre Definition enthält. Letztere Verknüpfung aber, durch welche diese Zeichen einer zunächst unausführbaren Operation definirt werden, die Multiplication, verliert ganz ihre früher festgesetzte Bedeutung der wiederholten Setzung einer gewissen Reihe von Einheiten, wenn x keine ganze Zahl ist. Was also ist die Bedeutung der letzten Gleichung?

Diesen gebrochenen Zahlen, welche zunächst als reine Zeichen auftreten, kann in vielen Fällen eine actuelle Bedeutung beigelegt werden. Denkt man sich nämlich die Einheit $+ 1$ als in a Theile zerlegbar, deren einer $\frac{1}{a}$ ist, so kann der reale Begriff der Multiplication, wie er früher für ganze Zahlen, d. h. für wirkliche gesetzte Objecte gegeben war, auf diese neuen Objecte auch angewandt werden und man kann unter

$$b.\frac{1}{a} = \frac{b}{a}$$

den b mal gesetzten Theil $\frac{1}{a}$ verstehen. Dadurch ist die Bedeutung von $\frac{1}{a}.b$ noch nicht bestimmt, und wird es erst, wenn wir unter einer solchen Multiplication von $\frac{1}{a}$ in b die Operation verstehen, durch welche b in a Theile zerlegt wird; dann wird in der Anschauung der Beweis geliefert werden können, dass

$$\frac{1}{a}.b = b.\frac{1}{a} = \frac{b}{a}$$

und daher das commutative Princip gilt. Dabei ist aber zu bemerken, dass eine neue Definition der Multiplication in letzterem Falle ausdrücklich gegeben werden musste und so gewählt wurde, dass dieselben Gesetze, wie zuvor für ganze Zahlen, auch bei der Multiplication von Brüchen gelten. Die gebrochenen Zahlen, weil ihnen an solchen Substanzen oder Relationen, welche einer wirklichen Theilung fähig sind, eben diese Theile entsprechen, sind von Alters her als reale bezeichnet worden, obgleich es unzählig viele Dinge (Individuen) gibt, welche eine Theilung ihrem Begriffe nach gar nicht zulassen.

Eben dieser Umstand, der in ganz gleicher Weise den Begriff des Negativen gefährdet, insofern jener umkehrbare Gegensatz nicht in allen physischen Grössengebieten vorhanden ist, weist zur Genüge darauf hin, dass der Gesichtspunkt, aus dem wir bisher die negativen und gebrochenen Zahlen betrachtet haben, nicht der einer reinen Theorie ist, welche von dem Inhalte der zu verknüpfenden Objecte unabhängig ist. Jene eines wirklichen Gegensatzes fähigen Relationen, diese wirklichen Theile eines theilbaren Objectes sind nur gewissen Verhältnissen entsprechende concrete Bilder, deren Existenz auf zufälligen, aus der specifischen Natur des bestimmten Concreten hervorgehenden Bedingungen beruht. Jene allgemeinen formalen Verhältnisse, deren Möglichkeit von der Beschränktheit unserer empirischen Anschauungen unabhängig ist, und die man, insofern sie die Bedingung der Möglichkeit realer Verhältnisse einschliessen, transscendentale oder potentielle nennen kann, werden auch nicht an realen Objecten, sondern an intellectuellen oder an

Relationen solcher betrachtet werden müssen, wenn wir uns von der Zufälligkeit des Wirklichen befreien wollen. Die Bedingung zur Aufstellung einer allgemeinen Arithmetik ist daher eine von aller Anschauung losgelöste, rein intellectuelle Mathematik, eine reine Formenlehre, in welcher nicht Quanta oder ihre Bilder, die Zahlen verknüpft werden, sondern intellectuelle Objecte, Gedankendinge, denen actuelle Objecte oder Relationen solcher entsprechen können, aber nicht müssen.

§. 3.

Princip der Permanenz formaler Gesetze.

Es seien $a, b, c \ldots$ irgend welche in der Anschauung vorhandene oder mentale Objecte oder Relationen von Objecten, so kann man sich etwa a und b auf irgend eine Weise rein begrifflich und formal miteinander verknüpft denken und als Resultat der Verknüpfung ein neues Object oder eine neue Relation c ansehen, welche, weil sie in allen weiteren Schlüssen an Stelle der beiden Glieder a, b, insofern sie verknüpft sind, treten kann, gleich der Verknüpfung genannt werden soll. Geschieht jene Verknüpfung auf gesetzmässige Weise, und unterliegt sie gewissen Regeln, so übersieht man von vornherein, dass zwischen den Resultaten verschiedener Verknüpfungen neue Beziehungen stattfinden können, welche die Folgen der ursprünglich gesetzten sind, und aus letzteren durch logische Schlüsse abgeleitet werden können, die von der Natur der verknüpften Objecte gänzlich unabhängig sind. Wie wir die Regeln der rein formalen Verknüpfungen, d. h. der mit den mentalen Objecten vorzunehmenden Operationen definiren, steht in unserer Willkühr, nur muss eine Bedingung als wesentlich festgehalten werden: nämlich dass irgend welche logische Widersprüche in denselben nicht implicirt sein dürfen. Um überzeugt sein zu können, dass bei keiner irgend welchen Zusammensetzung der Verknüpfungen ein solcher Widerspruch auftreten kann, werden wir die Regeln selbst so unabhängig von einander halten müssen, dass keine in die andere übergreift: wir werden uns auf die absolut zureichenden beschränken müssen.

Es ist klar, dass ein System von solchen mentalen Operationen

aufgestellt werden kann, in welchem die Objecte und die Operationen, welchen sie unterworfen sind, ausreichend und nicht mehr als ausreichend definirt sind, welches aber, da es ohne Rücksicht auf irgend subordinirte actuelle Beziehungen aufgestellt ist, ohne jede Interpretation seiner Resultate, und ohne Anwendung, ein leeres bleibt. Um daher nicht in's Abstruse zu verfallen, werden wir die Operationen mit mentalen Objecten solchen formalen Regeln unterwerfen, dass sie die actuellen Operationen an anschaulichen Objecten und den deren Verhältnisse ausdrückenden Zahlen als untergeordnete in sich enthalten können. Die gemeine Arithmetik, die wesentlich mit einfachen gleichartigen Grössen operirt, und sich als arithmetica numerosa der concreten Zahlzeichen oder auch als arithmetica universalis oder speciosa concret allgemeiner Zeichen (species nach Vieta) z. B. der Buchstaben bedient, hat uns vorstehends ein System von Regeln kennen gelehrt, welche in der That den verlangten Charakter der vollkommenen Independenz unter einander haben. Diese werden wir zum Leitfaden nehmen und Operationen formal so bestimmen, dass die Resultate in die der gewöhnlichen Arithmetik übergehen, wenn an Stelle der mentalen Objecte, an denen operirt wird, solche in der Anschauung existirende Objecte getreten sind, deren gegenseitige Relationen durch gemeine Zahlen ausgedrückt werden.

Der hierin enthaltene hodegetische Grundsatz kann als das Princip der Permanenz der formalen Gesetze bezeichnet werden und besteht darin: Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen.

Dies Princip wird im Folgenden unsere Schritte leiten; es darf aber in seiner Allgemeinheit nicht ohne Weiteres und überall verwandt werden; wir werden es überall nur zur Definition der nothwendigen und hinreichenden Regeln, soweit diese von einander unabhängig sind, anwenden dürfen. Jedoch werden wir uns durch dasselbe nicht allzusehr beschränken lassen, namentlich die Commutativität unserer Operationen nicht unbedingt voraussetzen, da es sich als wissenschaftliche Nothwendigkeit gezeigt hat, Operationen

zu betrachten, welche allen Regeln der arithmetischen Multiplication nur mit Ausnahme jener entsprechen.

Die rein formale Mathematik, deren Principien wir hier dargelegt haben, besteht nach eben diesen nicht in einer Verallgemeinerung der gewöhnlichen Arithmetik; sie ist eine durchaus neue Wissenschaft, deren Regeln durch letztere nicht bewiesen, sondern nur exemplificirt werden, indem die formalen Operationen, auf actuelle Zahlen angewandt, dieselben Resultate geben, als die anschaulichen Operationen der gemeinen Arithmetik. In letzterer bestimmen die Definitionen der Operationen ihre Regeln, in ersterer die Regeln den Sinn der Operationen, oder anders zu reden, sie geben die Anweisung zu ihrer Interpretation und ihrem Gebrauch.

Es hat die Formenlehre nicht allein den engen Zweck, die gewöhnliche arithmetica universalis mit ihren ganzen, gebrochenen, irrationalen, negativen und imaginären Grössen zu erläutern und streng zu deduciren, sondern sie erweist sich mit ihrem Principe der Permanenz zugleich als eminent fruchtbar für den ganzen Organismus der Mathematik.

Es ist schwierig schon an dieser Stelle die ganze Wichtigkeit jenes Principes nachzuweisen; doch mag wenigstens einiges hier angedeutet werden:

Die reine Theorie der complexen Zahlen beruht auf diesem Princip, das uns zur Statuirung der an sich willkührlichen Verknüpfungs-Gesetze solcher einen Leitfaden liefert. Der Unterschied der complexen Zahlensysteme beruht auf particulären, neben den allgemeinen Gesetzen zulässigen Bestimmungen, in denen eben der Charakter des Zahlensystemes ausgesprochen ist. Doch können wir auf weitere allgemeine Erörterung dieses Punktes hier um so leichter verzichten, als das ganze vorliegende Werk seiner Entwickelung gewidmet ist.

Aber noch mehr: Man kann auch auf räumliche Objecte (Punkte, Strecken, Flächen- und Körperräume) Operationen anwenden, welche denen der gemeinen Arithmetik entsprechen, und die sich in überraschender Weise den natürlichen Gesetzen räumlicher Transformationen und Bewegungen anschliessen.

Auch die Mechanik ist der reinen Formenlehre untergeordnet, insofern ihre Objecte (Kräfte, Kräftepaare, Momente) nicht allein ihren Operationen unterzogen werden können, sondern auch in diesen der natürliche, nothwendige Ausdruck mechanischer Beziehungen (Zusammensetzung von Kräften, Kräftepaaren, in der Ebene und dem Raume) gefunden wird.

So erweisen sich denn, wie der Verlauf unserer Entwickelungen im Einzelnen darthun wird, die formalen Gesetze, wie sie die arithmetischen Operationen zeigen, als von weitreichender Bedeutung; das Princip der Permanenz nicht als ein specielles oder nur hodegetisches, sondern als ein metaphysisches, das mit unserer ganzen Anschauung auf das engste verknüpft ist; die formale Mathematik aber, zu der wir von jenen Elementaroperationen durch dieses Princip aufsteigen, als eine fundamentale Disciplin, welcher ebensowohl die

Lehre von der Verknüpfung der Grössen in abstracto, als derer in der räumlichen Anschauung, als der mechanischen Grössen subordinirt ist.

Wir haben bisher nur von dem Beharren der arithmetischen Formeln gesprochen. Doch müssen wir hier schon aufmerksam machen auf den allgemeinen Werth, den das Princip der Permanenz formaler Gesetze als ein methodologisches für die ganze Mathematik hat: Ist ein complexes Zahlensystem, z. B. das gemeine gegeben, dessen Zahlen $a = A + Bi$ sind, so kann man innerhalb desselben gewisse Operationen vornehmen, z. B. aa, aaa, $aaaa$, ... die man mit a^2, a^3, a^4 ... bezeichnet, wo dann, so lange M, N ganze positive Zahlen sind, die Gleichung

$$a^M a^N = a^{M+N}$$

stattfindet. Dies Gesetz, rein formal betrachtet, hat man nun auf alle möglichen reellen Werthe von M und N auszudehnen versucht, und gelangte so zu der Bedeutung von a^{-1}, a^{-2} ..., $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$ ... Der Fortschritt der Wissenschaft verlangte dann aber eine Erweiterung des Begriffes der Potenzirung auf complexe Exponenten; eine Aufgabe, die seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts unendlich oft angegriffen und mit mehr oder minderer Klarheit behandelt wurde, deren endliche, vollkommene Lösung aber erst Abel gab, indem er obiges formales Gesetz als Functionalgleichung zur Definition der Potenz mit complexen Exponenten erhob.

In ähnlicher Weise ist man neuerdings von der entsprechenden Gleichung aus zur Aufstellung des Begriffes negativer, gebrochener Differentiationen gelangt; andere Operationen, welche zunächst auch nur für ganzzahlige Veränderliche Bedeutung zu haben schienen, z. B. die numerischen Facultäten, sind von anderen Gleichungen aus erweitert worden. Immer ist die Permanenz formaler Gesetze der leitende Grundsatz; die Erfindung ist überall nur insofern selbstständig, als sie diejenigen Gesetze auszuwählen hat, die man für permanent erklärt.

Solche formale Gesetze, die von den gemeinen arithmetischen immerhin ganz verschieden sein mögen, können nun einer besonderen propädeutischen Untersuchung unterworfen werden, die gänzlich von der actuellen Bedeutung der Operationen abstrahirt, und es wird sich dies besonders dann als zweckmässig erweisen, wenn dieselben Gesetze mit verschiedenem Inhalte mehrmals in verschiedenen Disciplinen wiederkehren. Diese formale Mathematik würde dann mit der unter dem Namen des „calculus of operations" oder „symbols" besonders von den Engländern in letzter Zeit mit specieller Vorliebe gepflegten Disciplin zusammenfallen. Hierauf und auf den Nutzen, welchen dieser Calcul der Theorie der Functionen leistet, näher einzugehen, liegt nicht in dem Zwecke des vorliegenden Werkes.

Historisches. Dass an Stelle des absoluten Grössenbegriffes, mit dem die Arithmetik ausschliesslich operirt, ein allgemeinerer treten müsse, ist schon so lange als Nothwendigkeit anerkannt und mit grösserer oder geringerer Entschiedenheit ausgesprochen worden, als sich die imaginären Grössen in

der Algebra und Analysis eine gesicherte Stelle errungen haben. Aber auf welch' wunderliche Weise man das Bedürfniss befriedigen zu können glaubte, mag unter zahllosen Beispielen, die sich hier beibringen liessen, nur an der von CAUCHY (Analyse algébrique, 1821, S. 173 ff.) aufgestellten und sehr allgemein verbreiteten Theorie des Imaginären dargethan werden:

„En analyse, on appelle expression symbolique ou symbole toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même équations symboliques toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant et altérant selon des règles fixes ou ces équations elles-mêmes, ou les symboles qu'elles renferment.... Parmi les expressions ou équations symboliques dont la considération est de quelque importance en analyse, on doit sur tout distinguer celles que l'on a nommées imaginaires."

Sollte man eine Kritik dieses Raisonnements geben, man wüsste in der That nicht, wo anfangen. Da soll etwas „was nichts bezeichnet", oder „was etwas anderes bezeichnet, als es naturgemäss bezeichnen sollte", etwas „Unsinniges" oder „Ungenaues", mit anderem derselben Art gepaart, Reelles erzeugen. Da sollen „algebraische Zeichen" — sind dies Zeichen für Grössen oder wofür? denn etwas muss doch ein Zeichen bezeichnen — mit einander combinirt werden auf eine Weise, die „nichts bezeichnet." Ich glaube nicht zu viel zu sagen, wenn ich dies ein unerhörtes Spiel mit Worten nenne, das der Mathematik, die auf die Klarheit und Evidenz ihrer Begriffe stolz ist und stolz sein soll, schlecht ansteht. Wenn nun auch, vermöge der eigenthümlichen Natur der mathematischen Methode, die in ihrer Entwickelung selbst das Correctiv für die in den allgemeinen Begriffen begangenen Fehler und Unklarheiten trägt, die weitere Exposition CAUCHY's in ihren Resultaten richtig ist, so muss doch jenes Gaukelspiel, welches durch die Phrase „symbolisch" nur nothdürftig verdeckt wird, fort und fort störend eingreifen, wie er denn (S. 175) wiederum ausdrücklich erklärt: „L'équation

$$\cos(a+b) + \sqrt{-1}\sin(a+b) = (\cos a + \sqrt{-1}\sin a)(\cos b + \sqrt{-1}\sin b)$$

elle-même, prise à la lettre, se trouve inexacte et n'a pas de sens" u. s. w.

Die Begründung der Rechnungsoperationen wird von ihm folgendermassen gegeben: „Supposons que l'on multiplie l'une par l'autre les deux expressions $(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)$, $(\cos b + \sqrt{-1}\sin b)$, en opérant d'après les règles connues de la multiplication algébrique, comme si $\sqrt{-1}$ était une quantité réelle dont le carré fût égal à -1." (S. 174) „Les expressions imaginaires peuvent être soumises, aussi bien que les quantités réelles aux diverses opérations de l'algèbre" (S. 177) u. s. w. Ob dies aber willkührlich, oder nothwendig, und ob es erlaubt ist, darüber erfährt man nichts. Eben so oberflächlich als hier das Imaginäre behandelt CAUCHY das Negative in der ersten Note der Analyse algébrique.

Man begreift, dass es hier, wo nicht eine Geschichte der Metaphysik der mathematischen Grundbegriffe geschrieben werden soll, nicht möglich ist, auf die zahllosen Darstellungen einzugehen, welche sich von den Begriffen der Zahl, des Negativen, Imaginären und ihrer Rechnungsoperationen in den Lehrbüchern finden. Fast jeder einigermassen selbstständige Autor hat diese Schwierigkeiten, welche eine gründliche Darstellung jener Begriffe in den Elementen hat, gefühlt und sie auf unendlich mannigfaltige Weise zu überwinden gesucht.

Nachdem ich den Weg, den ich in diesem Werke eingeschlagen habe, als den einzigen wissenschaftlich genügenden erkannt hatte, habe ich es mir angelegen sein lassen, zu ermitteln, wie weit derselbe schon von anderen angezeigt worden sei. Meine Ausbeute ist nicht gross gewesen:

In England, wo man Untersuchungen über die Grundprincipien der Mathematik stets mit Vorliebe gepflegt hat, und wo selbst die bedeutendsten Mathematiker es nicht verschmäht haben, in gelehrten Abhandlungen sich mit ihnen zu beschäftigen, ist als derjenige, welcher die Nothwendigkeit einer formalen Mathematik zuerst mit Entschiedenheit erkannt hat, der von seinen Landsleuten sehr geschätzte Cambridger Gelehrte George Peacock zu nennen. In seinem interessanten Report on Certain Branches of Analysis (in dem III. Report of the British Assoc. f. the Advanc. of Science, London 1834, S. 185), ist das Princip der Permanenz freilich einerseits zu eng, andererseits ohne die nöthige Begründung aufgestellt. Die Werke, in denen er dasselbe weiter ausgeführt hat, die Arithmetical Algebra (Cambridge 1842) und die Symbolical Algebra (ebenda 1845) kenne ich ebensowenig wie die einschlagenden Abhandlungen von Augustus de Morgan „On the Foundation of Algebra" (Cambridge Phil. Transact. T. VII, pt. II, 1841 und III, 1842; VIII, pt. II, 1844 und III, 1847). Ueberhaupt ist mir von der zahlreichen Literatur, welche eine von Peacock ausgehende Cambridger Schule über die von ihnen sogenannte „symbolische Algebra" hervorgebracht hat, nur noch eine kurze Abhandlung von D. F. Gregory „On the Real Nature of Symbolical Algebra" (Trans. Roy. Soc. Edinburgh. Vol. XIV, 1840, S. 208) zugänglich gewesen.

In Deutschland hat eine rein formale Darstellung der arithmetischen Operationen M. Ohm in der ersten Auflage seines „Versuchs eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik" 1822 gegeben, die er dann in der zweiten Auflage von 1828, ohne seine Meinung darüber zu ändern, „dass nur dieser Weg logisch strenge und also allein der vollkommene Ueberzeugung gewährende ist", zu Gunsten einer grösseren Popularität, so umgestaltet hat, dass er von dem gewöhnlichen Zahlenbegriff ausgeht und denselben überall vermischt mit dem der formalen Operationen anwendet. Dadurch aber hat, ganz abgesehen von der bekannten Pedanterie und Weitläufigkeit in den Schriften Ohm's, die ganze Darstellung eine höchst unerquickliche Zwittergestalt angenommen.

In ähnlicher nur noch minder strenger Darstellung taucht der Gedanke Ohm's in deutschen Lehrbüchern hie und da auf, aber ohne dass er meines

Wissens irgendwo so consequent durchgeführt ist, als dies bei den Engländern muthmasslich geschehen ist. Man hat sich eben nie entschliessen können, die Formenlehre ohne den Zahlbegriff zu behandeln, sondern überall ihre Sätze aus der gemeinen Arithmetik b e w i e s e n. Bei einer streng wissenschaftlichen Behandlung geht aber dies nicht an, vergl. §. 10 und 11.

Der Gedanke, eine reine Formenlehre der Grössenlehre vorangehen zu lassen und letztere aus dem Gesichtspunkte der ersten zu betrachten, so wichtig er auch für die Begründung und die structive Gliederung des Gebäudes der Mathematik sein mochte, war so lange für den weiteren Aufbau derselben ohne wesentlichen Werth, als man sich nur darauf beschränkte, ihn ausschliesslich zum Beweise von Sätzen zu verwenden, die nicht allein schon längst bekannt, sondern auch sattsam, wenn auch so zu sagen nur empirisch, begründet waren. Erst H. Grassmann hat diesen Gedanken mit wahrhaft philosophischem Geiste ergriffen und von einem umfassenden Gesichtspunkte aus betrachtet. In seiner „Linealen Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik“ 1844 hat er auf ihn eine Wissenschaft gegründet, welche sich ganz allgemein mit abstracten, extensiven, stetigen Grössen, als deren concrete Bilder die räumlichen Figuren (Strecken, Flächen, Körperräume) erscheinen, und mit deren Verknüpfung, beschäftigt. Die rein formalen Verknüpfungsgesetze, die man nach dem hergebrachten Ausdrucke arithmetische Operationen nennt, finden hier ihr reales, aber abstractes Substrat, und, wenn man sie geometrisch veranschaulicht, ihre concrete reale Bedeutung. Die schönen in diesem Werke niedergelegten Ideen haben eine weitere Ausbildung und Verwendung erhalten in Grassmann's Leipziger Preisschrift „Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik“ 1847 und in seiner „Ausdehnungslehre“ von 1862. In letzterem Werke ist die Darstellung eine andere geworden, indem er hier die räumlichen Gebilde durch complexe Zahlen darstellt, deren Einheiten die den geometrischen Operationen entsprechenden Verknüpfungsgesetze zeigen. Mochte die Darstellung in dem ersten Werke durch ihr allerdings durchaus sachgemässes philosophisches Gewand und die ungewohnte Form der Operation mit Grössen, welche den Charakter der einfachen in der Arithmetik gebräuchlichen Grössen nicht haben, einigermassen abschrecken, so ist im letzten Werke die dem Mathematiker gewohnte Form eingehalten. Wenn trotzdem die Untersuchungen des geistreichen Forschers die Anerkennung nicht gefunden haben, die sie verdienen und die jeder, d e r s i e k e n n t, ihnen zollen muss, so ist dies, meines Erachtens, hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben, dass ihr Verfasser allen Sätzen sogleich die allgemeinste Form (in Bezug auf n Dimensionen) gegeben, dadurch aber die Uebersichtlichkeit und das Verständniss ungemein erschwert hat. Wo wir im Folgenden Grassmann's complexe Zahlen und ihre Operationen darzustellen haben, werden wir den Sätzen eine anschauliche, geometrische Gestalt geben, die in der That die wesentliche Allgemeinheit nicht beeinträchtigt.

Die Anwendung der Principien der allgemeinen Formenlehre auf einfache,

durch Setzung eines und desselben Objectes entstandene Grössen zeigt GRASSMANN in seinem „Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten" (Berlin 1861).

Auch Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON hat sich (Theory of conjugate Functions or Algebraic couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the science of Pure Time, Trans. of the Royal Irish Acad. Vol. XVII. Part II. S. 293. Dublin 1835, sowie in der Vorrede zu seinen Lectures on Quaternions, Dublin 1853) sehr eingehend mit der Begründung der Algebra beschäftigt. Er betrachtet die Algebra „as being no mere Art, nor Language, nor primarily a Science of Quantity, but rather as the Science of Order in Progression." Als Bild eines solchen Fortschrittes erscheint ihm die ideale, von allen Beziehungen von Ursache und Wirkung abstrahirte Zeit, da sie die reine Anschauungsform des inneren Sinnes nach KANT (Kritik der reinen Vernunft, in der Ausg. v. ROSENKRANZ und SCHUBERT, II. Bd., S. 40) sei, besser geeignet als der Raum, die Anschauungsform des äusseren Sinnes, insofern der Begriff des Vergangenen, Gegenwärtigen und Zukünftigen früher in dem Geiste entstehe, als der des Vorwärts und Rückwärts im Raume; die Algebra ist ihm die Wissenschaft von der reinen Zeit.

Gelangt er so zu den Begriffen der reellen Zahlen und ihrer Verknüpfungen, so geht er dann zu Paaren, Ternionen, Quaternionen u. s. w. solcher Zahlen über und hat deren formale Verknüpfungen und die verschiedenen dabei vorhandenen Möglichkeiten ausführlich untersucht (s. Vorrede zu den Lectures S. 8—30). Die Auffindung von entsprechenden Verknüpfungen räumlicher Gebilde hat ihn auf seine Quaternionen geführt. —

Wenn nun hienach der Gedanke, die allgemeine Arithmetik und Algebra unter dem höheren Gesichtspunkte einer formalen Mathematik, zu der das Princip der Permanenz ihrer formalen Gesetze führt, anzusehen, nicht absolut neu ist, so darf doch die ganze Art und Weise, in der ich denselben für die elementarsten und ältesten Theile der Mathematik ebensowohl wie ihre schwierigsten und neuesten Theorieen fruchtbar gemacht und systematisch durchgeführt habe, als neu und selbstständig bezeichnet werden.

———

ZWEITER ABSCHNITT.

Allgemeine Formenlehre.

§. 4.

Algorithmus associativer Rechnungsoperationen ohne Commutation.

Es sei eine Anzahl von Objecten a, b, c, d ... gegeben, welche gewissen Verknüpfungen, deren formale Eigenschaften im Folgenden der Reihe nach festgesetzt werden, in gleicher Weise unterworfen werden sollen.

Es bedeute $\lambda\,(a, b)$ eine Verknüpfung von a und b; und etwa c das Object, welches aus der vollzogenen Verknüpfung resultirt, so dass $\lambda\,(a, b) = c$ gesetzt werden kann. Diese Verbindung $\lambda\,(a, b)$ soll so beschaffen sein, dass, wenn man auf geeignete Weise das sich als Resultat ergebende Object c mit b thetisch verknüpft, dadurch das andere Glied der Verbindung a mit Nothwendigkeit wieder erhalten wird. Bezeichnet man diese letztere Verknüpfung mit Θ, so spricht $\Theta\,(c, b) = a$ oder

$$\Theta\,\{\lambda\,(a, b), b\} = a \tag{1}$$

diese Annahme in Zeichen aus und enthält zugleich eine Definition dieser thetischen Operation Θ aus jener λ, die wir als die lytische bezeichnen.

Ich bemerke sogleich, dass wir in diesem §. überall die lytische und thetische Operation, auf welche Objecte sie auch angewandt seien, als möglich und eindeutig voraussetzen wollen, d. h. wenn a, b gegeben sind, so soll $\Theta\,(a, b)$ ebenso wie $\lambda\,(a, b)$ nur eine

einzige Bedeutung haben, so dass alle Objecte, welche etwa für das Resultat dieser Verbindungen gesetzt werden dürfen, unter sich vollkommen gleich sind, sich also, der Definition des Gleichen zufolge, überall vertreten können.

Man kann hieraus sogleich Folgerungen ziehen: Wäre nämlich $\lambda\,(a, b) = \lambda\,(a', b)$, ohne dass $a = a'$, so wäre auch:

$$\Theta\,\{\lambda\,(a, b), b\} = \Theta\,\{\lambda\,(a', b), b\}$$

da aber $\Theta\,\{\lambda\,(a, b), b\} = a$, $\Theta\,\{\lambda\,(a', b), b\} = a'$, so ist dies unmöglich.

Aendert sich also a in $\lambda\,(a, b)$ bei constantem b, so ändert sich nothwendig auch das Resultat der Verknüpfung.

Die Gleichung $\lambda\,(x, b) = a$ hat hienach nur Eine Auflösung, die man findet, wenn man beide Seiten mit b thetisch verknüpft:

$$\Theta\,\{\lambda\,(x, b), b\} = \Theta\,(a, b)$$

also $x = \Theta\,(a, b)$, wodurch man die Identität:

$$\lambda\,\{\Theta\,(a, b), b\} = a \tag{2}$$

erhält. Hieraus geht weiter hervor, dass wenn

$$\Theta\,(a, b) = \Theta\,(a', b)$$

auch nothwendig $a = a'$ sein muss. Denn wäre dies nicht der Fall, so hätte man aus der Gleichung

$$\lambda\,\{\Theta\,(a, b), b\} = \lambda\,\{\Theta\,(a', b), b\}$$

das widersinnige Resultat $a = a'$.

Aus obiger Voraussetzung, der Eindeutigkeit der lytischen und thetischen Operation folgt also, dass wenn sich in $\lambda\,(a, b)$ und $\Theta\,(a, b)$ das e r s t e Glied ändert, während das zweite constant bleibt, sich auch gleichzeitig das Ergebniss der Verknüpfung ändert, also aus jeder der Gleichungen:

$$\lambda\,(a, b) = \lambda\,(a', b), \quad \Theta\,(a, b) = \Theta\,(a', b)$$

stets $a = a'$ geschlossen werden kann.

Nimmt man statt der obigen Voraussetzungen an, dass die Operation $\Theta\,(a, b)$ eindeutig ist und die Eigenschaft hat, dass sich ihr Resultat jedesmal ändert, wenn sich ihr erstes Glied ändert, so kann man hieraus, die beiden Eigenschaften der entsprechenden lytischen λ, eindeutig zu sein und sich zu verändern, wenn sich ihr erstes Glied ändert, ebenso leicht ableiten:

Angenommen nämlich, es wäre $\lambda\ (a, b)$ vieldeutig, d. h. es gäbe mehrere unter einander verschiedene Objecte, welche $\lambda\ (a, b)$ in den Formeln vertreten könnten, so seien c, c' zwei solche; dann wäre:

$$\Theta\ \{\lambda\ (a, b), b\} = \Theta\ (c, b) = \Theta\ (c', b) = a.$$

Nach der Annahme, dass $\Theta\ (c, b) = \Theta\ (c', b)$ nur sein kann, wenn $c = c'$, folgt die Eindeutigkeit der λ Operation und daraus weiter das Gesetz, dass sich $\lambda\ (a, b)$ jedesmal mit a ändert.

Zur Erläuterung dieser Bemerkungen nehmen wir die gemeinen reellen Zahlen und ihre Rechnungsregeln hier als bekannt an. Dann kann man z. B. $\Theta\ (a, b) = a + b$ setzen, wo beide eben angenommene Eigenschaften erfüllt sind. Dann ist $\lambda\ (a, b) = a - b$; denn es ist $\Theta\ (\lambda\ (a, b), b) = \Theta\ (a - b, b) = (a - b) + b = a$ wie verlangt, und in der That ist λ eindeutig. Setzen wir ferner $\Theta\ (a, b) = a\ b$ so ist $\lambda\ (a, b) = \frac{a}{b}$. Da erstere Operation, wenn a, b gemeine Zahlen sind, eindeutig ist und sich im Allgemeinen das Product ändert, wenn sich ein Factor ändert, so hat auch $\frac{a}{b}$ dieselben Eigenschaften. Da aber das Product diese Eigenschaft nicht hat, wenn $b = 0$, indem $a\,.\,0 = 0$, $a'\,.\,0 = 0$, so ist auch die umgekehrte Operation nämlich $\frac{a}{0}$ nicht eindeutig.

Ist etwa ferner $\Theta\ (a, b) = (a\ b)^2$, so ist $\lambda\ (a, b) = \frac{\sqrt{a}}{b}$ da $\Theta\ (\lambda\ (a, b), b) = \Theta\ (\frac{\sqrt{a}}{b}, b) = a$; es ist aber $\lambda\ (a, b)$ zweideutig, weil sich in dem eindeutigen Resultate $\Theta\ (a, b)$, das a ändern, nämlich in das entgegengesetzte übergehen kann, ohne dass sich das Resultat ändert.

Ist $\Theta\ (a, b) = a^b$, so ist $\Theta\ (c, b) = c^b = a$ wenn $c = \lambda\ (a, b)$; aus $c^b = e^{b \log c} = a$ folgt aber $c = \lambda\ (a, b) = e^{\frac{\log a}{b}}$ eine bekanntlich unendlich vieldeutige Zahl; dies steht damit im Zusammenhange, dass a^b sich nicht jedesmal ändert, wenn a einen anderen Werth annimmt, sondern unverändert bleibt, wenn es den Factor $e^{\frac{2\pi i}{b}}$ erhält.

Es mag hier sogleich bemerkt werden, dass es, allgemein zu reden, zu jeder thetischen Operation $\Theta\ (a, b)$ jedesmal zwei lytische gibt; die eine löst die Aufgabe $\Theta\ (x, b) = a$, die andere $\Theta\ (b, x) = a$; die eine ist wenn $\Theta\ (a, b) = e^{b \log a}$ gesetzt wird $x = e^{\frac{\log a}{b}}$, die andere $x = \frac{\log a}{\log b}$. Beide können nur zusammenfallen, wenn $\Theta\ (a, b) = \Theta\ (b, a)$.

Unter Voraussetzung der Eindeutigkeit beider Operationen hat man neben

$$\Theta\{\lambda(a, b), b\} = a \qquad (1)$$

wie schon gezeigt, die andere Gleichung:

$$\lambda\{\Theta(a, b), b\} = a \qquad (2)$$

Wir setzen ferner die associative Eigenschaft voraus, d. h. dass:

$$\Theta[a, \Theta(b, c)] = \Theta[\Theta(a, b), c] \qquad (3)$$

sei, wo man dann, ohne Zweideutigkeit hiefür:

$$= \Theta(a, b, c)$$

schreiben darf. Dann ist:

$$\Theta[a, \Theta(b, c, d)] = \Theta[a, \Theta\{\Theta(b, c), d\}]$$
$$= \Theta[\Theta\{a, \Theta(b, c)\}, d] = \Theta[a, \Theta(b, c), d]$$
$$= \Theta[a, \Theta\{b, \Theta(c, d)\}] = \Theta[\Theta(a, b), \Theta(c, d)]$$

so dass man hiefür wiederum:

$$= \Theta(a, b, c, d)$$

schreiben darf, womit man ausdrückt, dass man immer, und in ganz beliebiger Weise zwei aufeinanderfolgende Objecte paarweise thetisch zu verbinden hat; dann wieder zwei solche u. s. f. Gilt also das associative Princip bei 3 Gliedern, so gilt es auch bei 4 und überhaupt allgemein.

Als Beispiele durchaus eindeutiger Thesen, welche associativ sind, können die Addition und Multiplication dienen. Als Beispiele solcher, welche es nicht sind, z. B. $\Theta(a, b) = \frac{a+b}{2}$; denn dann ist $\Theta(\Theta(a, b), c) = \Theta\left(\frac{a+b}{2}, c\right)$ $= \frac{a+b+2c}{4}$; $\Theta(a, \Theta(b, c)) = \Theta\left(a, \frac{b+c}{2}\right) = \frac{4a+b+c}{2}$.

Aus den gemachten Voraussetzungen lassen sich nun eine Reihe von wichtigen Transformationen herleiten:

Setzt man

$$x = \Theta[a, \lambda(b, c)]$$

so hat man nach (3)

$$\Theta(x, c) = \Theta\{\Theta[a, \lambda(b, c)], c\} = \Theta\{a, \Theta[\lambda(b, c), c]\}$$

und daher nach (1)

$$\Theta(x, c) = \Theta(a, b)$$

also

$$\lambda\,[\Theta\,(x,\,c),\,c] = \lambda\,[\Theta\,(a,\,b),\,c]$$

oder nach (2) $x =$

$$\Theta\,[a,\,\lambda\,(b,\,c)] = \lambda\,[\Theta\,(a,\,b),\,c] \tag{4}$$

Setzen wir ferner:

$$x = \lambda\,[\lambda\,(a,\,b),\,c]$$

so hat man nach (1)

$$\Theta\,(x,\,c) = \Theta\,\{\lambda\,[\lambda\,(a,\,b),\,c],\,c\} = \lambda\,(a,\,b)$$

also wieder nach (1)

$$\Theta\,[\Theta\,(x,\,c),\,b] = a$$

oder nach (3)

$$\Theta\,[x,\,\Theta\,(c,\,b)] = a$$

und somit nach (2): $x =$

$$\lambda\,[a,\,\Theta\,(c,\,b)] = \lambda\,[\lambda\,(a,\,b),\,c] \tag{5}$$

Man hat ferner, wenn

$$x = \lambda\,[\Theta\,(a,\,c),\,b]$$

gesetzt wird, nach (1)

$$\Theta\,(x,\,b) = \Theta\,(a,\,c)$$

und nach (2)

$$\lambda\,[\Theta\,(x,\,b),\,c] = a$$

daher nach (4)

$$\lambda\,[\Theta\,(x,\,b),\,c] = \Theta\,[x,\,\lambda\,(b,\,c)] = a$$

und somit erhält man nach (2), $x =$

$$\lambda\,[a,\,\lambda\,(b,\,c)] = \lambda\,[\Theta\,(a,\,c),\,b] \tag{6}$$

eine Gleichung, welche mit (4) zu:

$$\lambda\,[\Theta\,(a,\,c),\,b] = \lambda\,[a,\,\lambda\,(b,\,c)] = \Theta\,[a,\,\lambda\,(c,\,b)], \qquad (4,\,6)$$

vereinigt werden kann und wo, wie in (5), die Vertauschung der Ordnung von c und b im mittelsten Gliede wohl zu beachten ist. —

Wir haben es oben als eine nothwendige Folge der vorausgesetzten Eindeutigkeit der lytischen und thetischen Verknüpfung kennen lernen, dass sich $\Theta\,(a,\,b)$, $\lambda\,(a,\,b)$ ändern muss, wenn sich das Vorderglied a ändert, während das Hinterglied b constant bleibt. Wir nehmen jetzt weiter an — und nennen diese ganze Voraussetzung die der vollkommenen Eindeutigkeit —, dass auch, wenn in $\Theta\,(a,\,b)$ sich das zweite Glied ändert, während das

erste unverändert bleibt, sich das Ergebniss der Verknüpfung ändere; dass man also aus $\Theta(\mu, b') = \Theta(\mu, b)$ immer auf $b = b'$ schliessen dürfe.

Eine nothwendige Folge hievon ist, dass, wenn $\lambda(a, b) = \lambda(a, b') = \mu$ also

$$\Theta\{\lambda(a, b), b\} = a, \quad \Theta\{\lambda(a, b'), b'\} = a$$

oder

$$\Theta(\mu, b) = \Theta(\mu, b'),$$

auch nothwendig $b = b'$ sein muss, sich also auch das Resultat der lytischen Verbindung ändert, wenn das zweite Glied ein anderes ist, während das erstere constant bleibt.

Wir nehmen nun an, dasses ein Object n, den Modulus der Operation gibt, welches mit jedem Object a thetisch verknüpft, dasselbe wieder als Resultat ergibt, so dass:

$$\Theta(a, n) = a \tag{7}$$

Dann hat man nach dem associativen Princip

$$\Theta\{a, \Theta(n, c)\} = \Theta\{\Theta(a, n), c\} = \Theta(a, c)$$

und nach der vorausgesetzten Eindeutigkeit

$$\Theta(n, c) = c \tag{8}$$

so dass die Ordnung, in der man den Modul mit dem Objecte verbindet, für das Resultat gleichgültig ist.

Ferner findet man:

$$\lambda(a, n) = a \tag{9}$$

denn es ist nach (1)

$$\Theta\{\lambda(a, n), n\} = a$$

und nach (7)

$$\lambda(a, n) = \Theta\{\lambda(a, n), n\} = a$$

Aus (2) erhält man ferner für $a = n$

$$\lambda[\Theta(n, b), b] = n$$

und da $\Theta(n, b) = b$

$$\lambda(b, b) = n \tag{10}$$

so dass der Modul durch die lytische Verknüpfung irgend eines Objectes mit sich selbst, erhalten wird.

Während sich $\Theta(b, n)$, $\Theta(n, b)$, $\lambda(b, n)$ einfach auf b reducirten, ist dies mit $\lambda(n, b)$ nicht der Fall. Wir schreiben:

$$\lambda\,(n, b) = b_n \qquad (11)$$

und nennen b_n das zu b inverse Object, b aber das directe. Dann lässt sich zeigen, dass das zu b_n inverse Object wiederum b ist, also b_n und b in dem conträren Gegensatze des directen und inversen stehen (vergl. §. 17). Man hat nämlich aus (6) für $a = n$, $b = n$:

$$\lambda\,[n, \lambda\,(n, c)] = \lambda\,[\Theta\,(n, c), n]$$

also da nach (8) und (9) $\lambda\,[\Theta\,(n, c), n] = \lambda\,(c, n) = c$ und nach (11) $\lambda\,[n, \lambda\,(n, c)] = \lambda\,[n, c_n] = (c_n)_n$ ist:

$$(c_n)_n = c \qquad (12)$$

Durch Einführung dieses Zeichens lässt sich ausserdem jede lytische Verknüpfung in eine thetische und umgekehrt verwandeln.

Denn man hat für $b = n$ aus (4):

$$\Theta\,[a, \lambda\,(n, c)] = \lambda\,[\Theta\,(a, n), c]$$

oder

$$\lambda\,(a, c) = \Theta\,(a, c_n) \qquad (13)$$

und aus (6) für $b = n$:

$$\lambda\,[a, \lambda\,(n, c)] = \lambda\,[\Theta\,(a, c), n]$$

oder

$$\Theta\,(a, c) = \lambda\,(a, c_n) \qquad (14)$$

Aus der Gleichung (4, 6)

$$\lambda\,[a, \lambda\,(b, c)] = \Theta\,[a, \lambda\,(c, b)]$$

ergibt sich noch für $a = n$, dass

$$[\lambda\,(b, c)]_n = \lambda\,(c, b) \qquad (15)$$

und aus (5) für $a = n$:

$$[\Theta\,(b, c)]_n = \Theta\,(c_n, b_n) \qquad (16)$$

Mit Hilfe dieses Begriffes des Inversen lassen sich jetzt die Gleichungen 4, 5, 6 so schreiben: Es ist

$$\Theta\,[a, \lambda\,(b, c)] = \Theta\,[a, \Theta\,(b, c_n)]$$

$$\lambda\,[\Theta\,(a, b), c] = \Theta\,[\Theta\,(a, b), c_n]$$

also gibt (4):

$$\Theta\,[a, \Theta\,(b, c_n)] = \Theta\,[\Theta\,(a, b), c_n]$$

Ebenso gibt (5)

$$\Theta\,[a, \Theta\,(b_n, c_n)] = \Theta\,[\Theta\,(a, b_n), c_n]$$

und (6)

$$\Theta\,[a, \Theta\,(c, b_n)] = \Theta\,[\Theta\,(a, c), b_n]$$

und sie sind somit nur Darstellungen des associativen Princips bei der Verknüpfung directer und inverser Objecte.

§. 5.

Algorithmus associativer Operationen mit Commutation; Bildung der inversen Objectenreihe.

Ist bisher das Resultat der Operation $\Theta\ (a, b)$ von $\Theta\ (b, a)$ als verschieden angesehen worden, so steht doch dem nichts entgegen, dass wir neben den Festsetzungen des vorigen §. noch die machen, dass jederzeit

$$\Theta\ (a, b) = \Theta\ (b, a).$$

Die anderen Formen, welche man dadurch den Gleichungen des vorigen §. geben kann, indem man z. B. statt (1) und (2)

$$\Theta\,\{b, \lambda\ (a, b)\} = a \qquad (1^*)$$

$$\lambda\,\{\Theta\ (b, a), b\} = a \qquad (2^*)$$

schreibt, führen wir der Leichtigkeit wegen, mit der sie sich ergeben, hier nicht weiter an. Nur eine wesentlich neue Gleichung mag hier erwähnt werden:

Setzt man nämlich

$$\lambda\,\{a, \lambda\ (b, c)\} = x$$

so hat man nach (5)

$$\lambda\ (x, c) = \lambda\ [\lambda\,\{a, \lambda\ (b, c)\}, c] = \lambda\ [a, \Theta\,\{c, \lambda\ (b, c)\}]$$

Aus der durch Commutation erhaltenen Gleichung (1*) hat man

$$\Theta\,\{c, \lambda\ (b, c)\} = b$$

also $\lambda\ (x, c) = \lambda\ (a, b)$ und daher $x =$

$$\lambda\,\{a, \lambda\ (b, c)\} = \Theta\,\{\lambda\ (a, b), c\} \qquad (6^*)$$

eine Gleichung, welche neben (6) gesetzt werden kann, aber eine ausdrückliche Folge der Commutativität ist — welch letztere Voraussetzung in den weiteren Untersuchungen dieses §. immer festgehalten werden soll.

Wir haben im Vorstehenden überall die unbeschränkte Ausführbarkeit aller Operationen vorausgesetzt, d. h. angenommen, dass es in dem betrachteten Gebiete von Objecten jedesmal ein Object gibt, welches als Resultat der Operation angesehen werden kann, und insofern mit den in die Operation eingehenden Objecten gleichartig ist, als es mit letzteren oder auch mit anderen aus ähn-

lichen Operationen hervorgehenden Objecten nach denselben, einmal festgesetzten Regeln verknüpft werden kann.

Nicht überall aber ist das Gebiet von Anfang an so ausgedehnt; vielmehr werden wir Fälle kennen lernen, in welchen die auf eine Reihe von Objecten angewandte thetische Operation allerdings jederzeit ein Object derselben directen Reihe liefert, während die Lysis nur in gewissen Fällen zu einem solchen führt, in anderen aber nicht, somit in gewissem Sinne unausführbar ist, und erst ausführbar wird, wenn man sich zu der gegebenen Reihe von Objecten eine inverse hinzudenkt, die entweder transscendental oder in der Anschauung construirbar ist. —

Wenn a, b Objecte der ursprünglich gegebenen Reihe bezeichnen, so wird $\lambda\ (a, b)$ ein Object dieser neuen Reihe oder auch unter bestimmten Bedingungen eines der ursprünglichen Reihe darstellen. Im letzteren Falle weiss man nach vorstehenden Regeln mit $\lambda\ (a, b)$ zu operiren, es lässt sich dies $\lambda\ (a, b)$ mit anderen Zeichen $\lambda\ (c, d) \ldots$, welche der ursprünglichen Reihe angehören, associativ verknüpfen. Gehört aber $\lambda\ (a, b)$ dieser alten Reihe nicht an, so ist es zunächst unbestimmt, wie dasselbe überhaupt mit anderen Objecten $\lambda\ (c, d) \ldots$, welche ebenfalls in der alten Reihe nicht vorhanden sind, oder auch mit denen der alten verknüpft werden solle. Hier tritt nun das Princip der Permanenz der Formen ein, indem es uns auffordert, die neuen Verknüpfungen so zu definiren, dass sie denselben formalen Bedingungen genügen, als die der ursprünglich gegebenen Objecte.

Aus (4) des vorigen §. findet man, wenn alle vorkommenden lytischen Verknüpfungen Objecte der alten Reihe sind:

$$\Theta\ [\lambda\ (a, b), \lambda\ (c, d)] = \lambda\ [\Theta\ (\lambda\ (a, b), c), d]$$

Vermöge der Commutativität und nach (4) hat man:

$$\Theta\ (\lambda\ (a, b), c) = \Theta\ (c, \lambda\ (a, b)) = \lambda\ (\Theta\ (c, a), b)$$

und daher:

$$\Theta\ [\lambda\ (a, b), \lambda\ (c, d)] = \lambda\ [\lambda\ (\Theta\ (c, a), b), d]$$

Nach (5) aber ist:

$$\lambda\ [\lambda\ (\Theta\ (c, a), b), d] = \lambda\ [\Theta\ (c, a), \Theta\ (d, b)]$$

also schliesslich

$$\Theta\ [\lambda\ (a, b), \lambda\ (c, d)] = \lambda\ [\Theta\ (a, c), \Theta\ (b, d)] \qquad (1)$$

Diese Gleichung nun wollen wir auch im Falle, dass die Verknüpfungen $\lambda(a, b)$, $\lambda(c, d)$ nicht beide Objecte der alten Reihe sind, als Definition ihrer thetischen Operation ansehen.

Aus derselben folgt sofort die Commutativität, denn es ist

$$\Theta[\lambda(c, d), \lambda(a, b)] = \lambda[\Theta(c, a), \Theta(d, b)]$$

ferner auch die Associativität: denn es ist

$$\begin{aligned}\Theta(\Theta[\lambda(a, b), \lambda(c, d)], \lambda(e, f)) &= \Theta(\lambda[\Theta(a, c), \Theta(b, d)], \lambda(e, f)) \\ &= \lambda(\Theta[\Theta(a, c), e], \Theta[\Theta(b, d), f]) \\ &= \lambda\{\Theta(a, c, e), \Theta(b, d, f)\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Theta(\lambda(a, b), \Theta[\lambda(c, d), \lambda(e, f)]) &= \Theta(\lambda(a, b), \lambda[\Theta(c, e), \Theta(d, f)]) \\ &= \lambda(\Theta[a, \Theta(c, e)], \Theta[b, \Theta(d, f)]) \\ &= \lambda\{\Theta(a, c, e), \Theta(b, d, f)\}\end{aligned}$$

Dass die Thesis zweier Objecte der zweiten Art $\lambda(a, b)$, $\lambda(c, d)$ immer wieder ein Object derselben Art, welches nämlich in der Form $\lambda(e, f)$ dargestellt werden kann, wo e f mit a b c d gleichartig sind, geht unmittelbar aus deren Definition hervor.

Es fragt sich aber weiter, ob bei der jener Thesis entsprechenden Lysis zweier Objecte der zweiten Art, nicht wiederum neue entstehen; es wird hierüber entschieden durch folgende Bemerkungen:

Wenn der frühere Modul der Operation jetzt die Eigenschaft hat, mit einem Objecte der neuen sowohl wie der alten Reihe thetisch verbunden, das Object selbst wieder zu erzeugen, so ist nach (1)

$$\lambda[\Theta(a, x), \Theta(b, x)] = \Theta[\lambda(a, b), \lambda(x, x)] = \lambda(a, b) \quad (2)$$

und daher z. B.

$$\lambda[\Theta(a, c, d), \Theta(b, c, d)] = \lambda(a, b). \quad (3)$$

Die Gleichung (2) gibt uns darüber Aufschluss, in welchem Falle zwei lytische Verbindungen $\lambda(e, f)$ und $\lambda(a, b)$ als gleich anzusehen sind.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage, die dahin lautet, ob immer ein Object x von der ersten oder der zweiten Art gefunden werden könne, so dass

$$x = \lambda[\lambda(a, b), \lambda(c, d)]$$

gesetzt werden kann, also zufolge der Definition der Lysis

$$\lambda\,(a,\,b) = \Theta\,\{x,\,\lambda\,(c,\,d)\}$$

ist. Soll x ein solches Object sein, so muss $x = \lambda\,(y,\,z)$ gesetzt werden können, wo y, z Objecte der alten Art sind, also

$$\lambda\,(a,\,b) = \Theta\,\{\lambda\,(y,\,z),\,\lambda\,(c,\,d)\} = \lambda\,\{\Theta\,(y,\,c),\,\Theta\,(z,\,d)\}$$

Setzt man nun nach (3):

$$\lambda\,(a,\,b) = \lambda\,\{\Theta\,[\Theta\,(a,\,d),\,c],\,\Theta\,[\Theta\,(b,\,c),\,d]\}$$
$$= \lambda\,\{\Theta\,(y,\,c),\,\Theta\,(z,\,d)]$$

so genügen

$$y = \Theta\,(a,\,d),\ z = \Theta\,(b,\,c)$$

dieser Gleichung und es ist:

$$\lambda\,[\lambda\,(a,\,b),\,\lambda\,(c,\,d)] = \lambda\,[\Theta\,(a,\,d),\,\Theta\,(b,\,c)]$$

also da $\Theta\,(a,\,d)$, $\Theta\,(b,\,c)$ Objecte der ersten Art sind, die lytische Verbindung von $\lambda\,(a,\,b)$ und $\lambda\,(c,\,d)$ ein Object erster oder zweiter Art.

Haben wir nun so erkannt, dass aus unserer Festsetzung über die Bedeutung einer Thesis von Objecten erster und zweiter Art mit einander, oder letzterer untereinander, nothwendig folgt, dass diese Thesis und ihre Lysis wieder auf Objecte dieser beiden Arten führen, und überhaupt für die der zweiten Art dieselben Gesetze der thetischen und lytischen Operationen gelten, als für die der ersten Art, so leuchtet ein, dass jetzt sämmtliche Sätze des vorigen §. ohne Weiteres für Objecte erster und zweiter Art in ihrer gegenseitigen Verknüpfung in Anspruch genommen werden können, und noch überdem die Formeln 4, 5, 6 jetzt, wo jede Lysis ausführbar ist, ganz allgemein und ohne jede Determination gelten werden.

Die Objecte zweiter Art bilden zunächst eine Reihe von der zweifachen Ausdehnung der Reihe, welche die der ersten einnehmen. Indessen kann man sie sämmtlich aus einer Reihe von Objecten, welche eine nicht grössere Ausdehnung als die ursprüngliche hat, durch thetische Verbindung erhalten Führt man nämlich nach dem vorigen §. den Begriff des Inversen

$$\lambda\,(n,\,b) = b_n$$

ein, so ist

$$\lambda\,(a,\,b) = \Theta\,(a,\,b_n)$$

und diese inversen Objecte bilden eine der Reihe der (directen) Objecte erster Art entsprechende Reihe, so dass jedem Gliede der einen Reihe eins der anderen in bestimmter Ordnung entspricht.

§. 6.

Die Addition und Subtraction.

Bezeichnen wir jetzt eine thetische, vollkommen eindeutige, associative Operation $\Theta(a, b)$ durch $(a + b)$ und die entsprechende ebenfalls vollkommen eindeutige lytische Function $\lambda(a, b)$ mit $(a - b)$, wo diese ihrem Begriffe nach in der Beziehung

$$(a - b) + b = a \qquad (1)$$

stehen, nennen erstere Addition, letztere Subtraction, so wird die associative Eigenschaft in der Gleichung

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c \qquad (3)$$

enthalten sein, aus der dann auch bei mehr als 3 Gliedern auf die gänzliche Gleichgültigkeit der Setzung der Klammern geschlossen werden kann.

Aus der Definition folgt:

$$(a + b) - b = a \qquad (2)$$

nebst den Gleichungen

$$a + (b - c) = (a + b) - c \qquad (4)$$

$$(a - b) - c = a - (c + b) \qquad (5)$$

$$a - (b - c) = (a + c) - b \qquad (6)$$

nach den ebenso bezifferten Gleichungen des §. 4.

Ist 0 der Modul der Operation, so dass

$$a + 0 = a \qquad (7)$$

so folgt ebenfalls nach §. 4

$$0 + c = c \quad (8), \qquad a - 0 = a \quad (9) \qquad b - b = 0 \quad (10)$$

Stehen zwei Objecte a und b in der Beziehung, dass

$$0 - a = b$$

so schreibt man:

$$- a = b \qquad (11)$$

und nennt b das zu a negative; dann gelten die Regeln:

$$-(-c) = c \qquad (12)$$

$$a - c = a + (-c), \ (13); \quad a + c = a - (-c), \ (14)$$

$$-(b - c) = c - b, \ (15); \quad -(b + c) = (-c) + (-b), \ (16)$$

Gilt ausser der Associativität auch die Commutativität, so hat man nach §. 5 unter anderen die Gleichungen

$$b + (a - b) = a \qquad (1^*)$$

$$(b + a) - b = a \qquad (2^*)$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c \qquad (6^*)$$

hinzu zu fügen, wo wir die übrigen, da sie sich durch Vertauschung der Glieder sehr leicht ergeben, hier nicht weiter anführen.

§. 7.

Die Multiplication und Division.

Wird eine neue associative, im Allgemeinen vollkommen eindeutige Operation, die Multiplication und ihre Lysis, die Division durch die Zeichen $a.b$ und $\frac{a}{b}$ dargestellt, so hat man nach §. 4

$$\frac{a}{b}\, b = a \qquad (1)$$

$$\frac{a\, b}{b} = a \qquad (2)$$

$$a\,(b\, c) = (a\, b)\, c = a\, b\, c \qquad (3)$$

Ferner

$$a\,\frac{b}{c} = \frac{a\, b}{c} \qquad (4)$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{c\, b} \qquad (5)$$

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a\, c}{b} \qquad (6)$$

Nennt man nun 1 den Modul dieser Operation, so dass

$$a.1 = a \qquad (7)$$

so folgt

$$1 . c = c, (8); \quad \frac{a}{1} = a, (9); \quad \frac{b}{b} = 1, (10).$$

Für die reciproken Zahlen $\frac{1}{a}$ gelten dann die Regeln:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)} = c, (12); \quad \frac{a}{c} = a \frac{1}{c} (13)$$

Wir nennen die jetzige Operation nur dann eine Multiplication, und die des vorigen §. eine Addition, wenn beide mit einander durch das distributive Princip in seinen beiden Theilen

$$(a + b) c = a c + b c \tag{17}$$

$$a (c + d) = a c + a d \tag{18}$$

verbunden sind und ausserdem der Modul der Addition die Eigenschaft hat, dass

$$a . 0 = 0, \; 0 . a = 0 \tag{19}$$

worin unmittelbar ausgesprochen ist, dass, wenn der eine Factor eines Productes Null ist, der andere sich ändern kann, ohne dass der Werth des Productes aufhört, Null zu bleiben. Die Division mit Null ist daher gänzlich unbestimmt.

Ist schon hiedurch die Voraussetzung einer vollkommenen Eindeutigkeit der Multiplication und Division durchbrochen, so wollen wir überhaupt bei der Division die unbedingte Eindeutigkeit nicht als zu ihrem Begriffe nothwendige Eigenschaft ansehen. In der That werden wir in später zu behandelnden Systemen, von 0 verschiedene Zahlen antreffen, welche insofern den Charakter des Modul 0 an sich tragen, als eine Veränderung des anderen Factors in einem Producte, deren einen Factor sie abgeben, nicht nothwendig dessen Werth ändert, so dass dann auch die Division durch dieselben gänzlich unbestimmt wird (vergl. den VIII. Abschnitt).

An Stelle der beiden Theile des distributiven Principes kann man eine einzige Formel setzen. Entwickelt man nämlich zunächst nach (17)

$$(a + b) (c + d) = a (c + d) + b (c + d)$$

so hat man nach (18)

$$(a + b) (c + d) = a c + a d + b c + b d \tag{20}$$

Wendet man dagegen zunächst (18) an:

$$(a + b) (c + d) = (a + b) c + (a + b) d$$

und dann (17), so findet man:

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Vergleicht man dies mit (20), so findet man, dass beide in der Aufeinanderfolge der Glieder verschieden sind, und daher:

$$ad + bc = bc + ad$$

oder wenn man $c = 1$, $d = 1$ setzt

$$a + b = b + a$$

sein muss, woraus wir den wichtigen Satz ableiten, dass, wenn zwei Operationen durch das volle distributive Princip mit einander verbunden sind, dann die erste nothwendig die commutative Eigenschaft besitzt. Nennen wir nun in der Regel zwei in dieser Weise von einander abhängige Operationen, Addition und Multiplication, so folgt aus rein formalen Gründen: die Addition ist stets commutativ. Die Multiplication aber werden wir im Allgemeinen nicht commutativ annehmen.

Aus den vorstehenden Beziehungen der Addition und Multiplication zu einander, lassen sich noch mehrere wichtige Folgerungen ableiten.

Aus (17) folgt für $b = -a$, da $a + (-a) = 0$ also: $(a + (-a))c = 0$ ist, $ac + (-a)c = 0$ also

$$(-a)c = -ac \tag{21}$$

Aus (18) für $d = -c$

$$a(-c) = -ac \tag{22}$$

Setzt man in (21), $-c$ statt c, so wird $(-a)(-c) = -a(-c)$ nach (22) $= -(-ac) = +ac$ also

$$(-a)(-c) = ac \tag{23}$$

Können so die bekannten Regeln der Multiplication negativer Zahlen aus dem distributiven Princip abgeleitet werden, so wird die entsprechende Aufgabe, die Regeln der Addition reciproker Zahlen oder von Quotienten ohne Commutation zu geben, nicht in der gewöhnlichen Weise gelöst werden können. Denn man hat

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) bd = \frac{a}{b}\, bd + \frac{c}{d}\, bd = ad + c\,\frac{1}{d}\, bd$$

also

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + c\,\frac{1}{d}\,bd}{bd}$$

ein Ausdruck, welcher im Allgemeinen nicht weiter reducirt werden kann; nur wenn $b = d$ ist, hat man:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) b = \frac{a}{b}\, b + \frac{c}{b}\, b = a + c$$

also
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \tag{24}$$

Ist aber die Multiplication commutativ, so findet man:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d} \tag{25}$$

Ohne Commutation kann man Ausdrücke, wie:

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = a\,\frac{1}{b}\,c\,\frac{1}{d}$$

nicht weiter, etwa auf $\frac{a\,c}{b\,d}$ reduciren, und $b\,\frac{a}{b}$, $\frac{b\,a}{b}$ ist von a im Allgemeinen verschieden.

Unter Voraussetzung der Commutativität des Productes aber hat man .

$$b\,\frac{a}{b} = a,\ (1^*);\quad \frac{b\,a}{b} = a,\ (2^*)$$

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a}{b}\,.\,c \tag{6*}$$

Die in den beiden letzten Paragraphen statuirten formalen Gesetze der Addition und Multiplication sind den bekannten und in §. 1, 2 angeführten Gesetzen der actuellen Addition und Multiplication in der Grössenlehre, mit einiger Freiheit (in Bezug auf die Commutativität) nachgebildet. Diese Gesetze sind es nun, die wir auf die Gebiete der Anschauung, in's Besondere des Raumes im Folgenden übertragen werden; und dies ist die eine Seite des Principes der Permanenz der formalen Gesetze.

Wir werden dabei im Allgemeinen so verfahren: Wenn ein Gebiet von Objecten gegeben ist, so wird man zunächst fragen, ob es eine auf sie anwendbare Operation gebe, welcher die Eigenschaften der Addition zukommen. Eine stricte Methode zur Beantwortung dieser Frage gibt es allerdings nicht, vielmehr wird die productive Erfindung sie lösen müssen; das Princip der Permanenz leistet dabei gute Dienste. Ist aber eine Operation gefunden, welche die Eigenschaften der Addition hat, so wird man weiter fragen, ob es eine entsprechende Multiplication gebe; um dies zu beantworten, wird man die Principien der Multiplication wiederum in mehr oder minder speciellen Fällen benutzen, und so dazu gelangen die Multiplication actuell zu definiren. Ist dies geschehen, so bleibt es dann noch übrig, in synthetischem Gange nach-

zuweisen, dass in der That alle fundamentalen Principien der Operation, wie sie in diesem §. gelehrt sind, erfüllt sind, und erst dann wird man die Operation streng genommen als Multiplication bezeichnen können. Das Princip der Permanenz ist hiebei überall nur ein im methodologischen Sinne dieses Wortes, analytisches; es müssen stets eine Reihe von arbiträren Annahmen gemacht werden, welche es nicht beweist, sondern nur leitet. Dass jene Annahmen arbiträr sind, geht genügend daraus hervor, dass verschiedene actuelle Operationen gegeben werden können, welche sämmtlich den allgemeinen formalen Regeln genügen.

Ebenso wie man die vorhergehenden Festsetzungen und daraus abgeleiteten Folgerungen auf die Geometrie übertragen kann, so kommen sie auch in der Theorie der complexen Zahlen in Anwendung. Einmal enthalten sie die Regeln ihrer Addition und Multiplication und dienen, wie im folgenden Abschnitt nachgewiesen werden wird, zur Definition ihres Charakters.

Andererseits aber kann man auch fragen, ob es in einem gegebenen Zahlensysteme noch andere Operationen Θ, λ, ... gebe, welche diesen Regeln genügen. Die Beantwortung dieser Frage gehört in die Theorie der Functionen und hat tiefere Bedeutung nur für den „calculus of operations"; doch wollen wir eine hieher gehörige Untersuchung, welche sich auf das gemeine complexe Zahlensystem bezieht, wenigstens in ihren Resultaten mittheilen:

Eine associative und commutative Function $\Theta\,(x, y)$ mit dem Modul m wird stets von der Form:

$$\Theta\,(x, y) = \varphi_1\,[\varphi\,(x) + \varphi\,(y) - \varphi\,(m)]$$

sein, wo φ, φ_1 zwei inverse Functionen sind, so dass $\varphi_1\,(\varphi\,(x)) = x$. Soll eine andere associative und commutative Function π mit dem Modul n,

$$\pi\,(x, y) = \psi_1\,[\psi\,(x) + \psi\,(y) - \psi\,(n)]$$

mit Θ durch das distributive Princip

$$\pi\,[\Theta\,(x, y), z] = \Theta\,[\pi\,(x, z), \pi\,(y, z)]$$

verbunden sein, so ergibt sich als allgemeine Form derselben:

$$\psi\,(x) = \frac{1}{a} \log\,[\varphi\,(x) - \varphi\,(m)]$$

wo a eine beliebige Constante ist. Setzt man $\varphi\,(x) = x$ so erhält man hieraus die Addition und Multiplication; die Form

$$\varphi(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

gibt unter gewissen Voraussetzungen über die Stetigkeit der Functionen überhaupt, die einzigen eindeutigen Operationen Θ, π.

DRITTER ABSCHNITT.

Die reellen Zahlen in ihrem formalen Begriffe.

§. 8.

Begriff eines Zahlensystems.

Bisher sind Objecte verbunden worden, die Resultate ihrer Verbindung mit neuen Zeichen versehen u. s. f., aber ohne dass in der Bezeichnung ein bestimmter Plan verfolgt worden wäre. Es leuchtet ein, dass dabei eine eigentliche Ausführung der Rechnungsoperationen, d. h. eine Darstellung des Resultates durch neue, zusammenfassende Zeichen nicht möglich ist. Eine solche wird erst dann möglich werden, wenn man auf eine consequente Weise sich ein Zeichensystem verschafft, so dass man das Resultat einer jeden Operation nothwendig durch eines derselben darstellen muss. Ein solches System kann nur geschaffen werden, indem man von gewissen Elementen, den Einheiten ausgeht, diese auf alle mögliche Weise durch gewisse Operationen verbindet und die Resultate dieser Operationen mit neuen Zeichen signirt. Diese neuen Zeichen werden dann nach vorstehenden Regeln wiederum zu verknüpfen sein und zu neuen Zeichen Veranlassung geben u. s. f. Fährt man so fort, bis man zu neuen Zeichen nicht mehr gelangt, also die Resultate der neuen Operationen durch die schon vorhandenen jedesmal ausgedrückt werden können, so nennt man die gebildete Zeichenreihe ein abgeschlossenes System oder Gebiet, dessen Ordnung ich nach der Zahl von Einheiten benenne, welche bei seiner Bildung verwandt worden sind. Verschiedene solche Gebiete erhält man, indem man von verschiedenen Einheiten ausgeht oder

den Operationen ausser den zuvor bemerkten allgemeinen Eigenschaften noch andere beilegt, welche mit ihnen nicht nothwendig gegeben sind, aber auch nicht im Widerspruch stehen dürfen. Eine Forderung bei der Ausbildung eines solchen Systemes wird die möglichste Sparsamkeit in der Anwendung von Zeichen sein; denn nur sie wird die Uebersichtlichkeit in demselben ermöglichen.

Die Zeichen eines solchen Systemes nenne ich **Zahlen** und setze also deren Begriff in einen nothwendigen Zusammenhang mit den Operationen, durch welche sie gebildet werden und in einander übergehen. Jede Veränderung der Operationsregeln bringt eine Veränderung der Zahlen mit sich.

Eine andere Definition des Begriffes der formalen Zahlen kann nicht gegeben werden; jede andere muss aus der Anschauung oder Erfahrung Vorstellungen zu Hilfe nehmen, welche zu dem Begriffe in einer nur zufälligen Beziehung stehen, und deren Beschränktheit einer allgemeinen Untersuchung der Rechnungsoperationen unübersteigliche Hindernisse in den Weg legt. Die Definition der formalen Zahl kann hienach dahin gegeben werden:

Eine Zahl ist der Ausdruck gewisser formaler Beziehungen beliebiger Objecte zu einander; ein Zahlensystem stellt eine systematisch geordnete Reihe solcher Beziehungen oder Verknüpfungen dar, deren Wesen den Character des Zahlensystems ausmacht.

Dass wir mit dieser Definition nicht in Widerspruch mit der S. 6 gegebenen treten, bedarf nach dem Vorangegangenen keines Beweises. Dort handelte es sich um die **actuellen** Zahlen, hier um **formale**; unter diese können jene subsumirt werden, welche in's Besondere die aus dem Grössenbegriffe hervorgehenden Beziehungen der Objecte zu einander und entweder deren Stellung in einer Reihe geordneter Objecte (Ordinalzahlen) oder das eigentliche Grössenverhältniss (Cardinalzahlen) ausdrücken.

§. 9.

Die positiven ganzen Zahlen.

Soll ein Zahlensystem aus einem einzigen Elemente gebildet werden, so wird man dazu den Modul der Addition nicht gebrauchen

können, wohl aber den Modul 1 der Multiplication, indem man

$$1 + 1 = 2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 + 1 = 4, \ldots$$

setzt. Die so erhaltenen Zahlen nennt man die absoluten oder numerischen Zahlen und 1 die numerische Einheit. Was ihre Verknüpfung miteinander betrifft, so kann sie an und für sich nach beliebigen Regeln stattfinden. Indess werden uns hier die in §. 6 und 7 gelehrten als Richtschnur dienen, dürfen jedoch ohne Beweis ihrer Verträglichkeit untereinander jetzt, wo eine Zahl an sich selbst die Spur ihrer Entstehung trägt, nicht sofort in ihrem ganzen Umfange angewandt werden.

Addition. So wählen wir zur Definition der Summe $(A + B)$ zweier Zahlen nicht das associative Princip in seiner Allgemeinheit, da dieses mehr als die nothwendigen Bestimmungsstücke in sich enthält, sondern einen Fall desselben:

$$A + (B + 1) = (A + B) + 1. \qquad (1)$$

Diese Gleichung bestimmt jede Summe. Denn setzt man zunächst $B = 1$, so findet man $A + (1 + 1) = (A + 1) + 1$, also da $1 + 1 = 2$ ist, $A + 2 = (A + 1) + 1$, wo $(A + 1) + 1$ eine Zahl unserer Reihe, ihrer Definition nach ist. Dann ist, $B = 2$ gesetzt $A + (2 + 1) = (A + 2) + 1$ oder $A + 3 = (A + 2) + 1$, wo $(A + 2)$ und daher auch $(A + 2) + 1$ also $(A + 3)$ eine Zahl unserer Reihe ist.

Auf diesem Wege findet man durch ein recurrirendes Verfahren, welches ohne alle Anschauung, rein mechanisch vor sich geht, unzweideutig jede Summe zweier Zahlen. Um z. B. $(7 + 5)$ zu finden, haben wir

$$7 + 5 = 7 + (4 + 1) = (7 + 4) + 1$$

Es ist aber

$$7 + 4 = 7 + (3 + 1) = (7 + 3) + 1$$
$$7 + 3 = 7 + (2 + 1) = (7 + 2) + 1$$
$$7 + 2 = 7 + (1 + 1) = (7 + 1) + 1$$
$$7 + 1 = 8$$

also $7 + 2 = 8 + 1 = 9$, $7 + 3 = 9 + 1 = 10$, $7 + 4 = 10 + 1 = 11$, und endlich $7 + 5 = 11 + 1 = 12$.

Die Summe ist also stets eindeutig und ändert sich, wenn sich einer der Summanden ändert.

Dass die Addition associativ ist, lässt sich folgendermassen erweisen. Vorausgesetzt, dass die Gleichung:

$$A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma \tag{2}$$

erfüllt ist, hat man, indem man (1) zweimal anwendet:

$$A + \{B + (\Gamma + 1)\} = A + \{(B + \Gamma) + 1\} = \{A + (B + \Gamma)\} + 1$$

Nach (2) aber ist dies $= \{(A + B) + \Gamma\} + 1$, also nach (1) $= \{A + B\} + (\Gamma + 1)$, also

$$A + \{B + (\Gamma + 1)\} = \{A + B\} + (\Gamma + 1)$$

Gilt also das associative Princip in (2), so gilt es auch, wenn Γ durch $(\Gamma + 1)$ ersetzt wird. Da (2) für $\Gamma = 1$ nach (1) jedenfalls erfüllt ist, so gilt (2) nach einer bekannten Schlussweise allgemein.

Was das commutative Princip betrifft, so kann dasselbe aus dem associativen leicht abgeleitet werden. Es sei

$$1 + A = A + 1 \tag{3}$$

so ist nach (1), (3)

$$1 + (A + 1) = (1 + A) + 1 = (A + 1) + 1$$

Da nun (3) für $A = 1$ erfüllt ist und aus ihm die entsprechende Gleichung, in der $(A + 1)$ die Stelle von A vertritt, abgeleitet werden kann, so gilt (3) allgemein.

Ferner sei
$$A + B = B + A \tag{4}$$
so ist

$$A + (B + 1) = (A + B) + 1 = (B + A) + 1 = B + (A + 1)$$
$$= B + (1 + A)$$

nach (1), (4), (1), (3), also nach (2)

$$A + (B + 1) = (B + 1) + A$$

womit denn auch (4) allgemein erwiesen ist.

Multiplication ist eine Operation, für welche

$$A . 1 = A \tag{5}$$

denn hierin liegt die Bedeutung der zur Bildung des Zahlensystems verwendeten Einheit. Die Multiplication im Allgemeinen kann durch die Gleichung

$$A (B + 1) = A B + A, \tag{6}$$

welche einen speciellen Fall des distributiven Gesetzes darstellt, recurrirend definirt werden. Denn hienach ist $A(1+1) = A . 1 + A$ also $A . 2 = A + A$, und es ist $A . 2$ bestimmt, da die Addition eine bestimmt ausführbare Operation ist. Ferner ist $A(2 + 1) =$

$A.2 + A$ also $A.3 = A.2 + A$, und ebenfalls bestimmt u. s. f. Das Product ist eindeutig und ändert seinen Werth, wenn ihn der eine Factor ändert, während der andere constant bleibt.

Hienach würde sich der Beweis des als Typus eines apodictischen Urtheils gebräuchlichen Satzes $2.2 = 4$, so gestalten: $2.2 = 2\,(1 + 1) = 2.1 + 2 = 2 + 2$, und $2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$.

Um nun das distributive Princip in seiner Allgemeinheit darzuthun, nehmen wir an, es gelte:

$$A\,(B + \Gamma) = A\,B + A\,\Gamma \qquad (7)$$

dann ist

$$A\{B + (\Gamma + 1)\} = A\{(B + \Gamma) + 1\} = A\,(B + \Gamma) + A$$
$$= A\,B + A\,\Gamma + A$$

wenn man successive (1), (6), (7) anwendet; nach (6) aber hat man schliesslich

$$A\{B + (\Gamma + 1)\} = A\,B + A\,(\Gamma + 1)$$

womit denn die Allgemeinheit von (7) erwiesen ist.

Was die andere Hälfte des distributiven Principes

$$(A + B)\,\Gamma = A\,\Gamma + B\,\Gamma \qquad (8)$$

betrifft, so sei (8) erfüllt; dann ist nach (6), (8), (4), (6)

$$(A + B)(\Gamma + 1) = (A + B)\,\Gamma + (A + B) = A\,\Gamma + B\,\Gamma + A + B$$
$$= A\,\Gamma + A + B\,\Gamma + B = A\,(\Gamma + 1) + B\,(\Gamma + 1).$$

Da (8) für $\Gamma = 1$ gilt, so gilt sie daher allgemein, und damit das volle distributive Princip.

Es sei ferner

$$A\,(B\,\Gamma) = (A\,B)\,\Gamma \qquad (9)$$

so ist successive nach (6), (7), (9), (6)

$$A\{B\,(\Gamma + 1)\} = A\,\{B\,\Gamma + B\} = A\,(B\,\Gamma) + A\,B = (A\,B)\,\Gamma + A\,B$$
$$= A\,B\,(\Gamma + 1)$$

womit (9), da $A\,(B.1) = (A\,B).1$ ist, das associative Princip bewiesen ist.

Es sei
$$1.A = A \qquad (10)$$

so ist nach (6), (10), (6)

$$1.(A + 1) = 1.A + A = A.1 + 1 = (A + 1).1$$

und da $1.1 = 1$, so gilt (10) allgemein. Wenn ferner

$$A . B = B . A \tag{11}$$

so ist nach (8), (11), (6)

$$(A + 1) B = A B + B = B A + B = B (A + 1)$$

und es gilt die Gleichung (11) allgemein, da sie für $A = 1$ gilt, womit das commutative Princip in seiner Allgemeinheit erwiesen ist.

Führt man schliesslich noch den Modul 0 der Addition durch

$$A + 0 = A$$

ein, dessen Multiplication durch

$$A . 0 = 0$$

bestimmt wird, so hat man in den Zeichen 0, 1, 2, 3, 4 ... ein Zahlensystem, innerhalb dessen solche Operationen, denen die charakteristischen Eigenschaften der Addition und commutativen Multiplication zukommen, seiner Bildungsweise nach stets ausgeführt werden können, ohne dass man aus dieser Zahlenreihe jemals herauszutreten hätte.

Den Gedanken, die Additions- und Multiplicationsregeln, so wie es hier geschehen ist, abzuleiten, verdankt man im Wesentlichen Grassmann (Lehrb. d. Arithmetik).

§. 10.

Die negativen ganzen Zahlen.

Bezeichnet man mit $(B - A)$ eine Zahl, welche der Gleichung

$$(B - A) + A = B \tag{1}$$

genügt, so ist dieselbe zufolge der Additionseigenschaften eindeutig bestimmt und es ändert sich das Resultat der Subtraction $(B - A)$, wenn sich eines der Glieder ändert, während das andere constant bleibt.

Es gibt jedoch solche Zahlen, welche man $(B - A)$ gleich setzen kann, in unserer bisherigen Reihe der absoluten ganzen Zahlen nur dann, wenn B in der Reihe auf A folgt. Geht B dagegen A vorher, so ist die Subtraction in diesem Gebiete unmöglich; soll daher ein Zahlengebiet geschaffen werden, in welchem jede Subtraction absoluter ganzer Zahlen möglich wird, so müssen wir $(B - A)$ in letzterem Falle als ein neues Zeichen ansehen, dessen Bedeutung in der Art und Weise erkannt wird, in der

es mit anderen seiner Art oder mit den ganzen Zahlen des §. 9 verknüpft wird. Wir definiren die Addition dieser neuen Zeichen unter sich und mit denen des §. 9 durch die Gleichung (1) des §. 5

$$(A - B) + (\Gamma - \Delta) = (A + \Gamma) - (B + \Delta) \qquad (2)$$

Dann gelten, wie in §. 5 gezeigt ist, alle zum Begriffe der Addition gehörigen Rechnungsregeln, und wenn man

$$(A - B) = -(B - A) \qquad (3)$$

setzt, so wird das Gebiet der bisherigen positiven Zahlen $+1, +2, +3, \ldots$ erweitert, indem zu ihnen die negativen Zahlen $-1, -2, -3, \ldots$ hinzutreten (vgl. §. 6).

Was man unter dem Producte einer negativen und einer positiven, oder zweier negativen Zahlen zu verstehen habe, werden wir nach dem Princip der Permanenz bestimmen, indem wir entsprechend den Gleichungen 21 bis 23 in §. 7

$$(-A)\Gamma = -A\Gamma \qquad (4)$$

$$A(-\Gamma) = -A\Gamma \qquad (5)$$

$$(-A)(-\Gamma) = A\Gamma \qquad (6)$$

setzen.

Es kann gegenüber einer sehr allgemein verbreiteten Ansicht nicht scharf genug hervorgehoben werden, dass diese Gleichungen in der formalen Mathematik nimmermehr bewiesen werden können; es sind arbiträre Conventionen zu Gunsten der Erhaltung des Formalismus im Calcul. (Betrachtet man dagegen die Zahlen als Repräsentanten der Punkte einer Geraden, oder, wie man auch abstracter gesagt hat, des Fortschrittes, so kann man freilich, wie bekannt, die Gleichungen erweisen.) Sind aber diese Conventionen einmal geschlossen, so folgen daraus alle anderen Gesetze der Multiplication mit Nothwendigkeit.

Zunächst geht aus diesen Definitionsgleichungen des Productes seine Commutativität hervor. Das distributive Princip wird man ableiten können, wenn man folgende Fälle unterscheidet:

1) Ist $A > B$, so ist zufolge des für positive Zahlen geltenden distributiven Gesetzes:

$$A\Gamma = \{(A - B) + B\}\Gamma = (A - B)\Gamma + B\Gamma$$

also

$$(A - B)\Gamma = A\Gamma - B\Gamma$$

und somit nach (4):

$$\{A + (-B)\}\Gamma = A\Gamma + (-B)\Gamma.$$

2) Ist $A < B$, so ist zuvörderst nach (3):

$$(A - B) = -(B - A)$$

also nach (4):

$$(A - B)\,\Gamma = -(B - A)\,\Gamma$$

und da, wie im analogen Falle eben gezeigt

$$(B - A)\,\Gamma = B\Gamma - A\Gamma$$

so ist $\quad (A - B)\,\Gamma = -(B\Gamma - A\Gamma) = A\Gamma - B\Gamma$

oder $\quad \{A + (-B)\}\,\Gamma = A\Gamma + (-B)\,\Gamma.$

3) Man hat nach 16 in §. 6

$$\{(-A) + (-B)\} = -(A + B)$$

also $\{(-A) + (-B)\}\,\Gamma = -(A + B)\,\Gamma = -(A\Gamma + B\Gamma)$

$$= -A\Gamma - B\Gamma = (-A)\,\Gamma + (-B)\,\Gamma.$$

Somit ist das Gesetz:

$$(a + b)\,\Gamma = a\Gamma + b\Gamma$$

wenn a, b positive oder negative Zahlen sind, allgemein erwiesen. Daraus folgt weiter:

$$(a + b)(-\Gamma) = -[(a + b)\,\Gamma] = -[a\Gamma + b\Gamma]$$
$$= -a\Gamma - b\Gamma = a(-\Gamma) + b(-\Gamma)$$

womit denn, da die Grundgleichungen die Existenz der commutativen Eigenschaft sofort lehren, das distributive Princip in seinem ganzen Umfange dargethan worden ist. Das associative Princip ist in den verschiedenen Fällen ebenso leicht zu erweisen: Man hat

$$A\,[B(-\Gamma)] = A\,[-B\Gamma] = -A\,[B\Gamma]$$
$$= A - B\Gamma = [AB]\,(-\Gamma)$$

ferner:

$$A\,[(-B)(-\Gamma)] = A\,[B\Gamma] = AB\Gamma = [-AB]\,(-\Gamma)$$
$$= [A(-B)]\,(-\Gamma)$$

schliesslich

$$(-A)\,[(-B)(-\Gamma)] = (-A)\,[B\Gamma] = -AB\Gamma$$
$$= +[AB]\,(-\Gamma) = [(-A)(-B)]\,(-\Gamma)$$

Dies sind mit Rücksicht auf die Commutativität alle möglichen Fälle.

§. 11.

Die Division und die gebrochenen Zahlen.

Die Auflösung der Gleichung

$$x B = A,$$

in der A, B positive oder negative Zahlen sind, bezeichnen wir mit

$$x = \frac{A}{B},$$

mag sie eine in unserer Reihe der positiven oder negativen Zahlen vorhandene ganze Zahl sein oder nicht. Im letzteren Falle ist jener Bruch ein Zeichen für ein zu der bisherigen Reihe hinzuzufügendes neues Object, eine gebrochene Zahl, deren Operationsregeln in der §. 5 auseinandergesetzten Weise gewonnen werden, indem man nach (1) in §. 5

$$\frac{A}{B}\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A\Gamma}{B\Delta} \tag{1}$$

setzt.

Auch hier ist ausdrücklich zu bemerken, dass diese Gleichung eine conventionelle ist und im Gebiete des rein Formalen nicht bewiesen werden kann. Definirt man den Bruch durch die Forderung einer actuellen Theilung, so kann dann die Gleichung, wie sich von selbst versteht, demonstrirt werden.

Dass das associative Princip, ebenso wie das commutative erfüllt ist, wurde schon in §. 5 nachgewiesen. Auch genügt die Reihe der eingeführten Zeichen, um jede Multiplication und Division von Brüchen möglich zu machen. Denn man hat, nach S. 28

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$$

Was die Addition von Brüchen betrifft, so bestimmen wir sie dem distributiven Princip gemäss aus:

$$\left(\frac{A}{B} + \frac{\Gamma}{\Delta}\right) B\Delta = A\Delta + \Gamma B,$$

einer Gleichung, die wenn $\frac{A}{B}$, $\frac{\Gamma}{\Delta}$ ganze Zahlen sind, ohne Zweifel gilt, und aus der die andere:

$$\frac{A}{B} + \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A\Delta + \Gamma B}{B\Delta} \tag{2}$$

folgt. Es fragt sich dabei, ob die Addition zweier Brüche ein unzweideutiges Resultat ergibt. Setzt man nämlich für $\frac{A}{B}$ einen damit gleichen Bruch, dessen Zähler und Nenner aber von A, B verschieden ist, so muss gezeigt werden, dass jetzt die Summe dennoch dieselbe ist. In der That, es ist

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{N}$$

nur, wenn $M = RA$, $N = RB$ ist; dann aber ist nach (2)

$$\frac{RA}{RB} + \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{RA\Delta + RB\Gamma}{RB\Delta}$$

und nach dem distributiven Principe

$$R(A\Delta + B\Gamma) = RA\Delta + RB\Gamma$$

also

$$\frac{RA}{RB} + \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A\Delta + B\Gamma}{B\Delta}.$$

Dass die Addition associativ ist, kann leicht gezeigt werden; denn es ist

$$\frac{A}{B} + \left(\frac{\Gamma}{\Delta} + \frac{E}{Z}\right) = \frac{A}{B} + \frac{\Gamma Z + E\Delta}{\Delta Z}$$

$$= \frac{A\Delta Z + B\Gamma Z + B\Delta E}{B\Delta Z}$$

$$\left(\frac{A}{B} + \frac{\Gamma}{\Delta}\right) + \frac{E}{Z} = \frac{A\Delta + B\Gamma}{B\Delta} + \frac{E}{Z}$$

$$= \frac{A\Delta Z + B\Gamma Z + B\Delta E}{B\Delta Z}.$$

Dass ferner allgemein das distributive Princip

$$\left(\frac{A}{B} + \frac{\Gamma}{\Delta}\right)\frac{E}{Z} = \frac{A}{B}\cdot\frac{E}{Z} + \frac{\Gamma}{\Delta}\cdot\frac{E}{Z}$$

gilt, ersieht man aus

$$\left(\frac{A}{B} + \frac{\Gamma}{\Delta}\right)\frac{E}{Z} = \frac{A\Delta + B\Gamma}{B\Delta}\cdot\frac{E}{Z}$$

$$= \frac{A\Delta E + B\Gamma E}{B\Delta Z} = \frac{A\Delta E}{B\Delta Z} + \frac{B\Gamma E}{B\Delta Z} = \frac{AE}{BZ} + \frac{\Gamma E}{\Delta Z}$$

Die ganze doppelte Reihe der Objecte, welche die gebrochenen Zahlen bezeichnen, kann aus einer einfachen Reihe, der der reciproken durch multiplicative Verbindung mit den durch die ganzen

Zahlen dargestellten, abgeleitet werden, da aus 13 in §. 7 hervorgeht, dass

$$\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}$$

gesetzt werden kann.

Wir haben somit auf eine gesetzmässige Weise eine Reihe von Zeichen, die rationalen positiven und negativen Zahlen aus der numerischen Einheit durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division entwickelt, so dass für jede durch diese Operationen geschehende Verknüpfung zweier Zeichen wieder ein zusammenfassendes Zeichen vorhanden ist, welches überall an Stelle der Zeichenverknüpfung selbst gesetzt werden kann. Die ganze Aufgabe des Zahlensystems besteht eben in dieser Zusammenfassung oder, wenn man will, symbolischen Darstellung. Wenn eine Reihe von Objecten gegeben ist, auf welche gewisse Operationen angewandt werden können, die den zuvor auseinandergesetzten Regeln genügen und welche in bestimmter Weise den Zahlen entsprechen, so dass zwei Objecte immer aber auch nur dann gleich sind, wenn in vorstehender Weise die als Zeichen derselben dienenden Zahlen einander gleich sind, so können die Zahlen, so lange es sich eben nur um die Verknüpfung jener Objecte — seien diese Substanzen oder Relationen — handelt, als Repräsentanten der Objecte selbst angesehen werden und es kann an Stelle der in stetem Vorstellen der Objecte selbst vorschreitenden Operation, ein Operiren mit Zahlen gesetzt werden, welches man Rechnen nennt.

§. 12.

Die höheren Operationen und die irrationalen Zahlen.

Es fragt sich, ob das Zahlensystem, das wir geschaffen haben, vollständig ist oder nicht. Gewiss ist es insofern vollständig, als es keine Aufgaben aus den 4 Species gibt, welche nicht durch ein Zeichen desselben gelöst werden können. Andererseits aber gibt es Aufgaben, welche ihre Lösung in ihm nicht finden, z. B. wenn die Zahl x gesucht wird, so dass $x\,x = 2$, so wird keine passende Zahl gefunden werden können, ebensowenig, wenn $x\,x = -1$ sein soll.

Dass eine diesen Gleichungen genügende Zahl überhaupt unmöglich sei, kann (vgl. S. 6) nicht behauptet werden. Zahlen sind Zeichen, denen etwas Reales entsprechen kann; ob es aber ein solches gibt, das mit sich selbst multiplicirt, $+2$ oder -1 gibt, kann nur durch die Betrachtung des Realen selbst entschieden werden. Unsere Aufgabe kann es hier nur sein, neue Zeichen zu schaffen für jene möglichen oder unmöglichen Realen. Wir bezeichnen die

Lösung der Gleichung $xx = A$ mit $x = \sqrt{A}$, und nennen sie eine irrationale Zahl. Es ist dann fraglich, was die Multiplication bedeute, d. h. welchen formalen Gesetzen sie genüge. Da eben nur in dem Falle $\sqrt{A}\,\sqrt{A} = A$ die Bedeutung des Productes bestimmt ist, so steht es in unserer Willkühr, welche Gesetze wir z. B. der Verknüpfung $B\sqrt{A}$ unterlegen wollen, für welche in unserer bisherigen Reihe ein Zeichen im Allgemeinen nicht vorhanden ist. Das Princip der Permanenz formaler Gesetze würde uns bei der Festsetzung der Bedeutung des Productes zu leiten haben, und es zugleich möglich machen, jenes Zeichen $\sqrt{A}$ auch dann beizubehalten, wenn A eine Quadratzahl, $\sqrt{A}$ also eine Zahl unserer obigen Reihe ist.

Hätten wir nun auch so die 4 Grundoperationen solcher Grössen $\sqrt{A}$ untersucht, so wäre damit in der That noch nicht viel geschehen; denn sogleich entstehen wieder neue Fragen nach den Zahlen, welche Gleichungen wie $xx = \sqrt{A}$ genügen, und für welche wiederum neue Zeichen gegeben werden müssen, ferner nach den Gesetzen der Verbindung aller dieser neuen Zeichen von Irrationalitäten untereinander, welche möglicherweise Zahlen aus der oben gebildeten Reihe der positiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen ergeben können u. s. w. Es ist klar: Man wird verzichten müssen, alle Aufgaben, welche die Einführung neuer Zeichen erfordern würden, vollständig und erschöpfend zu betrachten; man würde sich in ein ungeheures Labyrinth verirren, wenn man den bisherigen Gesichtspunkt der rein formalen Zahlenbildung ausschliesslich festhalten wollte. Es stellt sich vielmehr das Bedürfniss ein, den elementaren formalen Verknüpfungen der Zahlen eine actuelle Bedeutung unterzulegen, um zu sehen, ob es irgend etwas Reales gebe, welches der Auflösung der Gleichungen $xx = A$ u. s. f. entsprechen könne.

Das Irrationale, was uns hier entgegengetreten ist, in der rein formalen Mathematik durch den Grenzbegriff dem Rationalen zu interpoliren, scheint mir der Natur der Sache deshalb ganz unangemessen, weil eben ein solcher Grenzbegriff auf der Vorstellung des Kleinen und Grossen, welcher unserer Entwickelung durchaus fremd ist, und der Anordnung unserer Zahlen in eine stetige Reihe beruht, welche schon den Begriff der extensiven Grösse involvirt.

Jeder Versuch, die irrationalen Zahlen formal, und ohne den Begriff der

Grösse zu behandeln, muss auf höchst abstruse und beschwerliche Künsteleien führen, die, selbst wenn sie sich in vollkommener Strenge durchführen liessen, wie wir gerechten Grund haben zu bezweifeln, einen höheren wissenschaftlichen Werth nicht haben. Denn überall ist es Sache der systematischen Wissenschaft, sich der wahren Grundlagen der natürlichen Entwickelung der Ideen klar und bewusst zu werden, nicht aber den Organismus mit seiner immer frischen Productionskraft durch einen, wenn auch scharfsinnig construirten, doch todten und unproductiven Mechanismus ersetzen zu wollen.

Ich denke, dass ich mich im Vorstehenden, trotz der Abweichung von dem Gewöhnlichen, nicht dieses Fehlers schuldig gemacht habe. Mein Entwickelungsgang ist der Natur der Sache durchaus angemessen. Nachdem die Schwierigkeiten und Paradoxieen, welche die gewöhnliche Ansicht von dem Wesen der Zahlen als Grössen nothwendig mit sich führt, klar und bestimmt fixirt waren, habe ich dem Zwecke gemäss, der zur Einführung des Negativen, Imaginären und allgemein Complexen veranlasste, das Princip der Permanenz der arithmetischen Gesetze aufgestellt, den natürlichen Ausdruck des im Laufe der Zeit erweiterten Begriffes von Zahlen und Formeln. Mittels dieses Principes war es möglich, an Stelle des zunächst liegenden Begriffs einer Zahl, als des Ausdrucks der actuellen Relationen von Objecten und deren Operationen, den allgemeineren Begriff formaler, bloss im Gebiete des logischen Denkens sich bewegender Operationen und aus der mentalen Verknüpfung von Objecten hervorgehender Zahlen zu setzen, welche zunächst inhaltsleer, rein die abstracten Formen des zuammenfassenden Denkens des Unstetigen sind.

Jetzt aber hat uns der dialectische Process wieder auf unseren Ausgangspunct zurückgeführt. Das Irrationale verlangt zu seiner systematischen Fassung den Grössenbegriff.

VIERTER ABSCHNITT.

Die reellen Zahlen in der Grössenlehre.

§ 13.

Begriff der Grösse überhaupt.

Der Relationsbegriff „Grösse“ ist in der reinen Anschauung unmittelbar gegeben. Er bedarf daher nicht einer metaphysischen, sein Wesen vollkommen erfassenden Definition, sondern nur einer Exposition.

Mathematische Definitionen haben, soweit sie nicht Fixirung des Sprachgebrauches betreffen, nur diejenigen wesentlichen Eigenschaften des zu Erklärenden anzugeben, welche zur weiteren Entwickelung und zur Verknüpfung seines Begriffes mit anderen nothwendig erscheinen und sind daher trotz ihrer, häufig den logischen Gesetzen einer guten Erklärung zuwiderlaufenden Form (s. in Euklid's Elem. besonders die Definitionen I, 1, 2, 5; V, 4, 5), zulässig, auch wenn sie die Kategorie, zu welcher der Begriff des zu Erklärenden gehört, nicht genauer bezeichnen.

Was den Begriff Grösse betrifft, so werden wir hienach den Begriff der Quantität nicht zu definiren haben, wohl aber des Quantum — beide sind in dem Wort „Grösse“ mit einander vereinigt. Nicht was Grösse sei, sondern vielmehr was „gross“ sei, bedarf für uns einer Festsetzung. Eine Analyse des Gebrauches, den Euklid, der unübertreffliche Altmeister strenger mathematischer Methode, von dem Begriffe des Grossen macht, gibt folgende Definition:

G r ö s s e heisst ein Object, wenn es grösser, kleiner als ein anderes, oder ihm gleich ist, und in letzterem Falle ihm überall substituirt werden kann; wenn es ausserdem durch wiederholte Position vervielfacht (und getheilt) werden kann.

Gleichartig heissen Grössen, wenn die eine vervielfältigt, die andere übertreffen kann.

§. 14.

Die ganzen Zahlen in der Grössenlehre.

Unter der Summe zweier Grössen a und b versteht man eine neue Grösse, welche aus ihrer Synthesis als Resultat hervorgeht und jene beiden in sich enthält. Wir bezeichnen sie mit $(a + b)$, wo jetzt das + Zeichen eine actuelle Operation ausdrückt und mit dem früheren formalen + zunächst nicht verwechselt werden darf. Die Summe hat (vergl. S. 54) die Eigenschaften

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad (1)$$

$$a + b = b + a. \qquad (2)$$

Denkt man sich ein Object e, eine Görsse, einmal gesetzt und bezeichnet dies durch $1e$; dann dasselbe noch einmal gesetzt und mit dem ersten vereinigt, so nennt man das resultirende Object $2e$, vereinigt man damit e noch einmal und nennt dies $3e$ u. s. f., so erhält man die Reihe

$$1e + 1e = 2e,\ 2e + 1e = 3e,\ 3e + 1e = 4e$$

allgemein $$\mathcal{A}e + 1e = (\mathcal{A} + 1)\,e.$$

Dass man sich hier der früher angewandten Zeichen 1, 2, 3 ... und des + Zeichens in $(\mathcal{A} + 1)$ wieder bedienen kann, folgt daraus, dass nichts weiter als eine den formalen Gesetzen des §. 9 unterworfene Verknüpfung in diesen Zeichen ausgesprochen ist. Dass aber jetzt jene Gesetze in der That für diese Coefficienten gelten, folgt leicht aus den Eigenschaften (1), (2) der realen Addition. Denn da durch die Addition von $\mathcal{A}e$ und Be ein gewisses Vielfaches von e entsteht, welches man mit $(\mathcal{A} + B)\,e$ bezeichnen kann:

$$(\mathcal{A} + B)\,e = \mathcal{A}e + Be \qquad (3)$$

und nach der Eigenschaft (1):

$$\mathcal{A}e + (Be + \Gamma e) = (\mathcal{A}e + Be) + \Gamma e$$

so ist $$\mathcal{A}e + (B + \Gamma)\,e = (\mathcal{A} + B)\,e + \Gamma e$$

oder $$[\mathcal{A} + (B + \Gamma)]\,e = [(\mathcal{A} + B) + \Gamma]\,e$$

so dass aus der associativen Eigenschaft der realen Addition von

Grössen die entsprechende der formalen Addition von Zeichen folgt. Ebenso ergibt sich das commutative Gesetz:

$$(A + B)\, e = (B + A)\, e \text{ aus } Ae + Be = Be + Ae.$$

Ehe wir jedoch die Operation $(A + B)$ mit Recht als eine Addition bezeichnen können, muss eine entsprechende Multiplication gefunden werden.

Bemerkt man, dass dem Zeichen Ae jetzt die actuelle Operation, die man als mehrmalige Setzung oder Vervielfachung bezeichnet, zu Grunde liegt, so wird man unter $A\,(Be)$ ein Vielfaches von e zu verstehen haben, welches man mit AB bezeichnet, so dass

$$A\,(Be) = AB.e,$$

eine Bezeichnung, die deshalb erlaubt ist, weil aus der Natur der Sache hervorgeht, dass das associative Princip:

$$AB.(\Gamma e) = A\,(B\,\Gamma.e) = AB\Gamma.e$$

erfüllt ist; weil ferner aus $(A + B)\, c = Ac + Bc$ der eine Theil des distributiven Principes

$$(A + B)\,\Gamma e = A\Gamma e + B\Gamma e$$

und aus dem Grundsatze (vergl. S. 55):

$$A\,(b + c) = Ab + Ac \tag{4}$$

der andere Theil des distributiven Principes

$$A\,(Be + \Gamma e) = ABe + A\Gamma e$$

oder

$$A\,(B + \Gamma)\, e = (AB + A\Gamma)\, e$$

folgt.

Somit wären denn die gewöhnlichen Additions- und Multiplicationsregeln, die sich auf Zahlen beziehen, insofern sie Grössen bedeuten, auf die formalen des §. 9 zurückgeführt, und somit die erste Anwendung der formalen Zahlen auf actuelle Objecte gemacht.

Bemerkung über die logische Natur der Zahlformeln. Die im §. unter 1, 2, 3, 4 ausgesprochenen Sätze bedürfen noch einer weiteren Erläuterung, die ich nicht geben kann, ohne das Grenzgebiet der Mathematik und Philosophie zu betreten. Um kurz zu sein, werde ich mich nur auf zwei Hauptvertreter letzterer Wissenschaft beziehen, auf Kant (Kritik der reinen Vernunft, Ausg. von Rosenkranz und Schubert, Bd. II) und auf John Stuart Mill (A System of Logic ratiocinative and inductive, 5. Ausg., die in deutscher Uebersetzung, 2. Auflage, 1862 von J. Schiel, vorliegt), da des letz-

teren logische Principien besonders bei den Männern exacter Forschung ungemeinen Beifall gefunden haben.

KANT hat sich vielfach mit der Frage nach dem Wesen und dem Grunde der mathematischen Methode und mit der Natur ihrer Urtheile beschäftigt. Entsprechend seiner Ansicht von der Mathematik als „der Vernunfterkenntniss aus der Construction der Begriffe" hält er alle mathematischen Urtheile insgesammt für synthetisch (S. 702), indem er sie dabei gegenüberstellt den analytischen Urtheilen, welch letztere bekanntlich von einem Subjecte ein in seinem Begriffe offen oder versteckt liegendes, oder zu ihm gehöriges Prädicat aussagen, während die synthetischen ein Subject mit einem Prädicate verknüpfen, welches in jenem gar nicht gedacht war und durch keine Zergliederung aus ihm herausgezogen werden kann. Wenn nun die mathematischen Urtheile synthetische sind, so kann es den Mathematiker als solchen nicht interessiren, ob sie wie KANT will, aprioristisch sind, weil sie Nothwendigkeit mit sich führen, welche aus Erfahrung nicht gewonnen werden kann, und zwar abgeleitet aus der reinen Anschauung a priori, die vor aller Wahrnehmung in uns angetroffen wird als die Beschaffenheit des Gemüthes, von Objecten afficirt zu werden — oder ob sie, wie STUART MILL meint, „physikalische Thatsachen, Resultate der Erfahrung und Beobachtung sind, welche auf einer Induction per enumerationem simplicem, auf der Thatsache beruhen, das sie immerwährend wahr und kein einzigesmal falsch befunden worden sind." (S. a. a. O. hauptsächlich das IV., V., VI, XXIV. Capitel.)

Um unserer Seits uns eine klare Ansicht von dem Wesen der Grundsätze zu verschaffen — denn über die Möglichkeit, aus diesen analytisch oder deductiv die weiteren mathematischen Lehrsätze abzuleiten, ist überall kein Zweifel — müssen wir auf einen wesentlichen Unterschied zwischen solchen aufmerksam machen.

Wir wenden uns in dieser Beziehung an EUKLID, der in der Edition von GREGORY (Euclidis quae supersunt omnia, Oxford 1703), die fast allen späteren Ausgaben zu Grunde liegt, folgende 12 Grundsätze aufstellt:

1) Was Einem und demselben gleich ist, ist unter einander gleich.
2) Gleiches Gleichem zugesetzt, gibt Gleiches.
3) Von Gleichem Gleiches weggenommen, gibt Gleiches.
4) Gleiches Ungleichem zugesetzt, gibt Ungleiches.
5) Von Ungleichem Gleiches weggenommen, gibt Ungleiches.
6) Gleiches verdoppelt, gibt Gleiches.
7) Gleiches halbirt, gibt Gleiches.
8) Was einander deckt, ist einander gleich.
9) Das Ganze ist grösser als sein Theil.

10) Alle rechten Winkel sind einander gleich.
11) Zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, dass die beiden inneren an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als

zwei Rechte sind, treffen genügend verlängert an derselben Seite zusammen.

12) Zwei gerade Linien schliessen keinen Raum ein.

Man sollte meinen, dass selbst die oberflächlichste Betrachtung hier zwei wesentlich verschiedene Klassen von Grundsätzen unterscheiden lässt, deren eine (1—9) sich auf Verhältnisse bezieht, die mit dem Begriff der Grösse wesentlich verknüpft sind, während die andere (10—12) geometrische Wahrheiten enthält. Und doch ist dieser Unterschied von den meisten Mathematikern ganz übersehen worden, wie schon genugsam der Umstand beweist, dass man beide unter dem einen Namen der Axiome zusammengeworfen hat, den Euklid gar nicht kennt, denn er hat diesen Unterschied auf das schärfste erkannt: In allen Manuscripten, welche F. Peyrard zum Zwecke seiner vortrefflichen Ausgabe des Euklid (Les oeuvres d'Euclide, trad. en latin et en français. I. Bd. 1814, s. Varianten S. 454) verglichen hat, befindet sich der berühmte 11. Grundsatz der Parallelentheorie mit den Sätzen vom Gleichen und Ungleichen nicht in einer Kategorie der *κοιναὶ ἔννοιαι*, sondern figurirt als 5tes Postulat (*αἴτημα*). Der 10. Grundsatz nimmt ebenfalls in allen die Stelle des 4ten Postulates ein, während die Handschriften in Bezug auf den 12. Satz schwanken, so dass man deutlich sieht, wie ein Missverständniss nach und nach diese drei Postulate an eine falsche Stelle gebracht hat, an der sie unbegreiflicher Weise noch heute stehen.

Von den Grundsätzen, die aus der geometrischen Anschauung entspringen, kann es nicht in Zweifel gezogen werden, dass es synthetische in der Ausdrucksweise Kant's oder inductive sind, wie sie Stuart Mill nennt: eine weitere Discussion der Natur dieser *αἰτήματα* ist hier für unsern Zweck ohne directe Bedeutung.

Näher liegt uns die andere Klasse der Grundsätze, die der *κοιναὶ ἔννοιαι* (notiones communes), deren Unterschied von jenen Kant wohl bemerkt hat. „Einige wenige Grundsätze, welche die Geometer voraussetzen, sind zwar wirklich analytisch und beruhen auf dem Satze des Widerspruchs; sie dienen aber auch nur, wie identische Sätze, zur Kette der Methode und nicht als Principien, z. B. der 9. Grundsatz. Und doch auch diese selbst, ob sie gleich nach blossen Begriffen gelten, werden in der Mathematik nur darum zugelassen, weil sie in der Anschauung können dargestellt werden" (S. 704, vergl. auch S. 143); und in voller Uebereinstimmung soweit sie in der Ausdrucksweise zwischen Idealisten und Empiriker stattfinden kann sagt Stuart Mill: „Einige Axiome Euklid's könnten ohne Zweifel in die Form von Definitionen gebracht, oder aus ähnlichen Sätzen abgeleitet werden, wie wenn man statt des 8. Axioms die Definition nehmen könnte: Gleiche Grössen sind solche, welche so aufeinandergelegt werden können, dass sie sich decken und die Axiome 1, 2, 3 können darnach durch ein eingebildetes Aufeinanderlegen bewiesen werden... Es gibt indessen auf der Liste der Axiome zwei oder drei fundamentale Wahrheiten, welche nicht demonstrirt werden können; hieher

gehört der Satz 10, 11 ..." (a. a. O. V, §. 3). „Wie andere sogenannte Definitionen, so sind dieselben aus zwei Dingen zusammengesetzt, aus der Erklärung des Namens und aus der Behauptung einer Thatsache, wovon die letzte allein ein erstes Princip oder eine Prämisse einer Wissenschaft bilden kann" (XXIV, §. 5).

Mit diesen Erläuterungen des Wesens der notiones communes wird man sich im Wesentlichen einverstanden erklären können. Ein solcher Grundsatz spricht ein abstract allgemeines und nothwendiges Gesetz aus, welches in allen Grössengebieten stattfindet, und ohne seinen wesentlichen Charakter aufzugeben, in eine Definition verwandelt werden kann, welches ferner einen solchen Grad von Evidenz besitzt, dass es durch seine blosse Exposition als unzweifelhaft wahr erkannt wird. Dies mag hier, wo nicht die Logik der mathematischen Methode überhaupt entwickelt werden soll, genügen. Recht eigentlich aber interessirt uns hier die Frage, wie es mit den Urtheilen von der Form $2.2 = 4$ beschaffen sei.

Kant gibt uns hierauf folgende Antwort: „dass $7 + 5 = 12$ sei, ist kein analytischer Satz, denn ich denke weder in der Vorstellung von 7, noch von 5, noch in der Vorstellung von der Zusammensetzung beider die Zahl 12.... Ob er aber gleich synthetisch ist, so ist er doch nur ein einzelner Satz.... Dergleichen Sätze muss man also nicht Axiome (denn sonst gäbe es deren unendlich viele), sondern Zahlformeln nennen" (a. a. O. 144). Er belehrt uns dann weiter, „dass man über die Begriffe von 5 und 7 hinausgehen müsse, indem man die Anschauung zu Hilfe nimmt, etwa seine 5 Finger und so nach und nach die Einheiten der in der Anschauung gegebenen 5 zu dem Begriffe der 7 hinzuthun.... Der arithmetische Satz ist also jederzeit synthetisch, welches man desto deutlicher inne wird, wenn man etwas grössere Zahlen nimmt, da es dann klar einleuchtet, dass, wir möchten unsere Begriffe drehen und wenden, wie wir wollen, wir ohne die Anschauung zu Hilfe zu nehmen, vermittels der blossen Zergliederung unserer Begriffe die Summe niemals finden könnten" (S. 703).

Die Ansicht, nach welcher das Eins-und-eins sowie das Ein-mal-eins eine unbegränzte Reihe von Axiomen, wenn auch Kant vor diesem Namen zurückschreckt — aufweist, ist so unangemessen und paradox, dass man kaum begreift, wie man sich bei ihr beruhigen könne. Freilich war Kant's Ansicht nicht allein der Ausdruck der von ihm wohlgekannten Mathematik seiner Zeit, wo Kaestner als grosser Mann galt; sie ist auch noch der Ausdruck der meisten neueren, in anderer Beziehung vortrefflichen Lehrbücher der Arithmetik, in denen von einer Begründung der Zahlformeln auf anderem Wege, als an den fünf Fingern nicht die Rede ist. Und wenn man auf diese Weise auch den Satz $2.2 = 4$ begründen kann, so wird man, obgleich Kant gerade letzteres vorschlägt, wohl darauf verzichten müssen, den Satz, dass $1000.1000 = 1000000$ auf diese Art zu erweisen. Man rühmt es der Mathematik nach und die apodictische Gewissheit ihrer Sätze beruht darauf, dass sie auf einer äusserst kleinen Zahl von independenten Grundwahrheiten de-

ductiv ein unendliches Gebäude errichtet; und hier soll gar eine unendliche Anzahl von unter sich unendlich mannigfach verbundenen Pfeilern das Gebäude tragen, obgleich nur ein einziges Bindeglied zu wanken braucht, um den ganzen stolzen Bau zum Umsturz zu bringen!

Auch bei Stuart Mill (a. a. O. XXIV, §. 5) „ist die in der Definition einer Zahl behauptete Thatsache, eine physikalische Thatsache.... Wenn wir sagen, dass $12^3 = 1728$, so behaupten wir, dass, wenn wir im Besitz einer hinreichenden Anzahl von Kieseln oder von anderen Gegenständen sind, und sie zu der besonderen Art von Haufen oder Aggregaten zusammenfügen, die man 12 nennt und diese 12 wieder in ähnliche Haufen zusammenbringen und endlich 12 von diesen grösseren Parthien vereinigen: das so gebildete Aggregat ein solches sein wird, welches wir 1728 nennen, das nämlich welches entsteht, wenn wir das 1000 Kiesel genannte Aggregat, das 700, das 20 und das 8 Kiesel genannte zusammenfügen.“ Dies alles muss zugestanden werden, es ist nur die Frage, wie dies zu beweisen ist, da man es schwerlich auf die Probe mit den Kieseln ankommen lassen wird. Hierauf hat Stuart Mill die richtige Antwort: „Es gibt unendlich viele Entstehungsweisen einer jeden Zahl, aber wenn wir Eine Erzeugungsweise einer jeden kennen, so kann der ganze Rest deductiv bestimmt werden.... Wenn wir eine Kette von inductiven Wahrheiten, welche alle Zahlen der Reihe miteinander verknüpft, gebildet haben, so können wir die Bildung irgend einer dieser Zahlen aus einer anderen einfach dadurch bestimmen, dass wir von der einen zur anderen die Kette entlang gehen.... Was die Arithmetik zum Typus einer deductiven Wissenschaft macht, ist die glückliche Anwendbarkeit von einem so umfassenden Gesetze, wie: die Summen von Gleichen sind gleich, oder: was aus Theilen zusammengesetzt ist, ist aus Theilen dieser Theile zusammengesetzt. Diese Wahrheit... muss als eine inductive Wahrheit, oder als ein Naturgesetz von der höchsten Ordnung betrachtet werden.... Es ist bei allen Rechnungen unsere Gewähr. Dass $5 + 2 = 7$ glauben wir auf den Beweis dieses inductiven, mit den Definitionen der Zahlen verbundenen Gesetzes hin. Wir gelangen zu diesem Schluss (wie Alle wissen, die sich erinnern, wie sie ihn zuerst lernten), indem nur die blosse Einheit auf einmal addirt wird, $5 + 1 = 6$, daher $5 + 1 + 1 = 6 + 1 = 7$ und da $1 + 1 = 2$, so ist $5 + 1 + 1 = 5 + 2 = 7$.“

Diese in der That wissenschaftlich einzig und allein zulässige Idee ist dieselbe, welche in vorstehender Entwickelung nicht ein blosses Aperçu geblieben, sondern ein systematischer Gedanke geworden ist.

Als Grundsatz bei der Addition ist angenommen worden

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$, d. h.: Wenn a, b, c drei Grössen sind, so erhält man dasselbe Resultat, ob man zu a die durch Vereinigung von b und c hervorgehende Grösse $(b + c)$ addirt, oder zu a erst b und dann zu dieser vereinigten Grösse $(a + b)$ die Grösse c.

2) $a + b = b + a$, d. h.: Man erhält dasselbe Resultat, mag man b zu a oder a zu b hinzufügen.

Um die Summen von mehrmals gesetzten Grössen, also ihre Vielfachen zu

bezeichnen, haben wir ein früher durch formale Verknüpfungsgesetze gebildetes Zeichensystem angewandt. Es musste dabei weiter der Satz angewandt werden,

3) dass, wenn $a = Ae$, $b = Be$, auch $(a + b)$ ein bestimmtes von der Natur von e unabhängiges Vielfaches von e ist, welches wir als das $(A + B)$-fache bezeichnen konnten, indem wir unter dieser Verbindung $(A + B)$ eben vermöge der beiden Grundsätze 1) und 2) die in §. 9 formal definirte Addition der Grössen verstehen konnten. Diesen Satz kann man in einer deutlicheren Sprache so ausdrücken: Ist $a = Ae$, $b = Be$ und $a' = Ae'$, $b' = Be'$, so ist $(a + b)$ von e dasselbe Vielfache als $(a' + b')$ von e' und in dieser Form wird der Satz von Euklid V, 2, exponirt.

Diese 3 hier angeführten Grundsätze haben durchaus den Charakter der notiones communes. Sie werden durch eine Explication vollkommen evident, gelten für alle Grössengebiete nach der reinen Anschauung der Grösse, und können, ohne ihren Charakter einzubüssen, in Definitionen verwandelt werden, indem man sagt: Unter der Addition von Grössen versteht man eine Operation, welche diesen 3 Sätzen genügt.

Was nun die Multiplication von Zahlen in der Grössenlehre und insofern sie ein Vervielfachen bezeichnen, angeht, so erfordert sie den Satz: $A\,(B\,e) = (A\,B)\,e$; d. h. wenn $b = Be$, $a = Ab$ und $b' = Be'$, $a' = Ab'$, so ist a dasselbe Vielfache von e als a' von e'. Dies beweist Euklid V, 3, indem er dabei den Satz benutzt:

4) $A\,b + A\,c = A\,(b + c)$, der in den Elementen V, 1 explicirt ist.

Sieht man die Beweise der Lehrsätze V, 1 und 2 bei Euklid genauer an, so wird man sie von wesentlich anderem Charakter finden, als er allen übrigen Beweisen seiner Elemente zukommt. Es sind gar keine Beweise, denn es fehlt ihnen der logische Vordersatz; Folgerungen werden gezogen, die auf keinen Grundsatz zurückgeführt werden; es sind keine Deductionen, sondern Expositionen oder Inductionen in der Sprachweise der Empiriker. Versucht man aber die fehlenden oberen Prämissen zu ergänzen, so findet man keine anderen, als die von mir unter 1), 2) angeführten associativen und commutativen Principien, die man in versteckter Weise wohl in dem 2. Grundsatze des Euklid enthalten, ansehen kann. Ich meine aber, dass eine im Sinne der Alten vollkommen strenge und wissenschaftliche Behandlung der Grössenlehre überhaupt, das associative und commutative Princip bei der Addition, sei es nun als Definition dieser oder als eigentlichen Grundsatz, nicht entbehren kann. Beide werden übrigens bei der Behandlung discreter Grössen streng genommen in das einzige Axiom

$$A\,e + (B + 1)\,e = (A + B)\,e + 1\,e$$

zusammengefasst werden können (vergl. §. 9).

Durch die Annahme dieser beiden Grundsätze würde übrigens die Zahl derselben nicht vermehrt werden, da man mit ihrer Hilfe die Euklid'schen Axiome 1—9 theilweise aufeinander reduciren kann, was ohne sie aber nicht,

wie man zuweilen gemeint hat (s. z. B. MILL, a. a. O. XXIV, §. 5), möglich ist.

Doch muss ich bemerken, dass ich die Untersuchung über die Zahl und die Form der Axiome, welche der Grössenlehre noch hinzuzufügen sind, mit vorstehenden kurzen Bemerkungen nicht erledigt haben will. Es würde die erschöpfende Lösung der Frage uns von unserem Ziele allzuweit entfernen, da in diesem Werke die Lehre von den Grössen nur insoweit von Interesse ist, als sie in Beziehung mit der rein formalen Mathematik tritt. Letztere kennt weder *αἰτήματα*, noch *κοιναὶ ἔννοιαι;* ihre Operationen sind an sich willkührlich und die Richtigkeit ihrer Schlüsse hängt von der Möglichkeit und Wirklichkeit jener Operationen überall nicht ab.

§. 15.

Die rationalen Zahlen in der Grössenlehre.

Sind a, b zwei gleichartige Grössen, d. h. also solche, welche vervielfältigt einander übertreffen können, so fragt es sich, ob man die eine derselben b so vervielfältigen könne, dass ihr Vielfaches

$$X b = a \qquad (1)$$

wird. Haben a, b ein gemeinschaftliches Maass, von dem sie Vielfache sind, d. h. ist $a = M e$, $b = N e$ und ist die Gleichung

$$X N = M$$

in ganzen Zahlen X auflösbar, so ist auch die Auflösung jener Gleichung (1) oder

$$X N e = M e$$

gefunden. Kann aber die Gleichung $X N = M$ nicht in ganzen Zahlen aufgelöst werden, sondern nur durch eine gebrochene Zahl

$$X = \frac{M}{N}$$

im Sinne des §. 11, so fragt es sich, was man unter dieser Operation $\frac{M}{N} b$ zu verstehen habe.

Dazu denken wir uns die Einheit e beliebig, z. B. in N Theile zerlegbar und bezeichnen einen derselben mit $\frac{1}{N} e$, so dass $N \left(\frac{1}{N} e\right) = e$ oder auch $\frac{1}{N} N e = e$ und überhaupt $\frac{1}{N} N = 1$ gesetzt werden darf. Unter $M \left(\frac{1}{N} e\right)$ hat man dann übereinstimmend

mit unseren Bezeichnungen in §. 14 diese Grösse $\frac{1}{N}e$, M mal gesetzt zu verstehen. Dass

$$M\left(\frac{1}{N}e\right) = \frac{1}{N}(Me),$$

folgt unmittelbar aus der Natur der actuellen Theilung und Vervielfachung, und wenn wir

$$M\left(\frac{1}{N}e\right) = \left(M\frac{1}{N}\right)e = \frac{M}{N}e$$

setzen, so ist, um die Uebereinstimmung dieses Zeichens $\frac{M}{N}$ mit dem in §. 11 eingeführten nachzuweisen, nichts weiter erforderlich, als dass die allgemeinen Gesetze, welchen diese gebrochenen formalen Zahlen unterliegen, jetzt als nothwendige Folgen des Theilungsbegriffes dargethan werden.

Man vergleiche in Hinsicht dieses Beweises in's Besondere Euklid VII und VIII. Buch, sowie Grassmann's Lehrbuch der Arithmetik Art. 130 u. ff. Ich beschränke mich auf diese Hinweisung, da hier in der That keine irgend welche neuen Principien eintreten, denen höheres wissenschaftliches Interesse zukäme, und ich überhaupt darauf verzichtet habe, die Anwendung der Zahlen in der Grössenlehre ganz systematisch und der tieferen Natur des Gegenstandes entsprechend, ausführlich zu behandeln. —

Man pflegt die Verbindung einer formalen Zahl mit einer Grösse e, Ae als eine Multiplication anzusehen, was dadurch gerechtfertigt ist, dass das distributive Princip zum Theil in den Gleichungen

$$(A + B)e = Ae + Be, \qquad A(b + c) = Ab + Ac$$

enthalten ist. Ebenso sieht man die Lösung $X = \frac{b}{a}$ der Gleichung $Xa = b$ als einen Quotienten an. Wenn gleich dieser Ausdrucksweise nichts widerspricht, so ist sie doch von geringem Werthe, da jener Multiplication keine Addition einer formalen Zahl A und einer Grösse a entspricht; denn $A + a$ hat keine Bedeutung; zu jener Division zweier Grössen aber gibt es im Allgemeinen keine entsprechende Multiplication $a \,.\, b$.

Man nennt Ae eine benannte Zahl, ein Ausdruck, den wir jedoch um allen Verwechselungen zu entgehen, nicht weiter anwenden werden; in unserer Sprachweise würde Ae eine actuelle Zahl heissen, während die Zahl, die man in der Arithmetik gemeiniglich als absolute bezeichnet, in gewissem Sinne mit unserer formalen zusammenfällt.

Man sieht, wenn man das bisher erläuterte zusammenfasst: Wenn A irgend eine ganze oder gebrochene rationale formale Zahl

bezeichnet, so wird durch $A\,e$ eine actuelle mit e vorzunehmende Operation angedeutet, welche, wenn die Grösse e eine willkührlich theilbare ist, immer ausgeführt werden kann, und auf eine bestimmte neue Grösse führt. Die Operation der realen Addition zweier Grössen $A\,e$, $B\,e$, sowie das Vervielfachen und Theilen der Grösse $A\,e$, können ersetzt werden durch die formale Addition, Multiplication und Division formaler Zahlen, der Coefficienten A, B.

§. 16.

Die irrationalen Zahlen.

Im Vorstehenden haben wir die Gleichung

$$X \cdot b = a$$

unter der Voraussetzung, dass b und a commensurabel sind, aufgelöst. Sind aber diese gleichartigen Grössen a, b incommensurabel, so gibt es in unserem Systeme überhaupt keine Zahl, welche die Aufgabe löst. Man kann dann rationale Zahlen M, N so bestimmen, dass

$$\frac{M}{N}\,b - a$$

kleiner als irgend eine gegebene kleine Grösse ist. Die Operation, welche durch X dargestellt wird, kommt also der Theilung und Vervielfachung, welche in $\frac{M}{N}$ ausgedrückt ist, im Resultat so nahe als man will, ohne jedoch je mit ihr zusammenzufallen. Da $X\,b$ als eine, mit $\frac{M}{N}\,b$ verwandte Operation erscheint, so nennt man X ebenfalls eine Zahl, eine irrationale, für welche in unserem Systeme kein Zeichen vorhanden ist, und welche eben nur durch $X = \frac{a}{b}$ bezeichnet werden kann.

Ausser dieser Aufgabe, der Division incommensurabler Grössen, gibt es noch eine unbegrenzte Anzahl anderer, z. B. Wurzelausziehungen, Grenzwerthe von unendlichen Summen, Producten, Kettenbrüchen u. s. w., welche in unserem Systeme der rationalen Zahlen einer Lösung nicht fähig sind. Wenn es aber rationale Zahlen gibt, welche der gestellten Forderung beliebig genau genügen, so wird man die Aufgabe als durch eine irrationale Zahl

lösbar ansehen, der an der zu Grunde gelegten Einheit eine Operation entspricht, welche Theilungen und Vervielfältigungen wenigstens verwandt ist.

Das Princip der Permanenz wird uns hier sofort die Bedeutung der Summe, des Productes von irrationalen Zahlen mit um so grösserer Leichtigkeit geben, als das Resultat der Verknüpfung von irrationalen Zahlen unter einander oder mit rationalen, dem Resultate der entsprechenden Verknüpfung beliebig naher rationaler Zahlen auch immer beliebig nahe kommen muss. Eine einfache Exhaustionsmethode, bei deren Ausführung wir hier nicht zu verweilen brauchen, gibt dann den Satz, dass für irrationale Zahlen genau dieselben Operationsregeln als für rationale gelten. Somit ist mit einem Schlage die in §. 12 gelassene Lücke ergänzt.

Die rationalen Zahlen im Verein mit den zwischen sie interpolirten und ihre Reihe zu einer stetigen vervollständigenden irrationalen nennt man die reellen Zahlen.

Die von einer irrationalen Zahl geforderte Operation kann als möglich gedacht werden, wenn das System der gleichartigen Grössen, mit dem wir operiren, ein stetiges ist. Dann wird es eine Reihe von Zahlenoperationen geben, welche, so lange sie noch nicht in's unendliche fortgesetzt ist, immer noch von der verlangten abweicht, aber ihr immer und unbegrenzt näher kommt. Die verlangte Operation kann dann durch die ideale Vollendung einer unendlichen Reihe von Zahlenoperationen ausgeführt gesetzt werden. Insofern nun eine solche unendliche Fortsetzung eben in ihrer Vollendung unfassbar ist, und jederzeit auf einen Widerspruch führt, müssen wir behaupten, dass die irrationalen Zahlen unmöglich sind, so lange nicht ein Mittel gefunden ist, solche auf andere Weise als durch Theilung und Vervielfachung und überhaupt durch Zahlenoperationen darzustellen. Ein solches Mittel bietet nun die Geometrie in ihren von jedem Zahlbegriff unabhängigen Grössenoperationen dar, aber nur indem sie den Begriff des Stetigen, in dem eben jener Widerspruch versteckt ist, als einen gegebenen ansieht Das reine, von jeder Anschauung losgelöste Denken kann das Unendliche nicht erfassen, die formale Zahlenlehre nicht das Irrationale. Die Anschauung aber bedarf des Stetigen: Die Geometrie beweist die Existenz des Irrationalen.

Während wir die rationalen Zahlen auf eine gesetzmässige Weise aus einer Einheit durch Vervielfachen und Theilen bilden, sie dem entsprechend principmässig bezeichnen und aus einer geringen Anzahl von Zeichen (im dekadischen Zahlensysteme von 10) zusammensetzen konnten, so können die irrationalen Zahlen durch ein solches Verfahren nicht, sondern nur durch ein

stetiges Operiren an der Einheit gew nnen werden und **entziehen** sich daher, weil sie nicht discret zum Bewusstsein kommen, einer solchen **systematischen Bezeichnung mit Nothwendigkeit.** Nur gewisse Klassen von irrationalen Zahlen, z B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, ... welche in einfachen Beziehungen zu rationalen stehen, können wieder nach einem bestimmten Princip bezeichnet werden. Im Allgemeinen wird man sich irgend welcher Zeichen für irrationale Zahlen bedienen müssen; für gewisse Irrationalen hat man in π, e, u. s. w. recipirte Zeichen, die erst ihre Bedeutung erhalten, indem man z. B. e durch die unendliche Reihe:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots$$

definirt. Der Begriff der unendlichen Reihe, überhaupt der **Grenze**, ist, nachdem wir den Begriff der **Grösse** eingeführt haben, welche schon eine vollendete an sich ist, und nicht erst durch diesen Summationsprocess erzeugt werden soll, nicht mehr unzulässig.

Die Alten haben die Schwierigkeit, welche es hat, von discreten Grössen und deren begrifflichem Ausdruck, den Zahlen als „einer aus Einheiten bestehenden Menge" (deren Eigenschaften im VII.—IX. Buche von Euklid's Elementen behandelt sind) zu den stetigen Grössen, welche in einer dem transscendentalen Schema des Extensiven vollkommen adäquaten geometrischen Form und mit besonderer Rücksicht auf geometrische Grössen, im V. und X. Buche der Elemente behandelt sind, überzugehen, für so gross gehalten, dass sie das Irrationale dem Zahlbegriff gar nicht unterordneten, vielmehr ausdrücklich behaupteten: „Incommensurable Grössen verhalten sich nicht wie Zahlen zu einander" (Euklid's Elem. X, 7, vergl. S. 65). Die Aufhebung dieser Beschränkung des Zahlbegriffes, die den Alten unmöglich schien, seit dem 16. Jahrhundert aber mit grosser, ja man kann wohl sagen, allzugrosser Leichtigkeit und ohne allen Widerstand durchgeführt wurde, hat die Functionenlehre und damit die ganze neuere Mathematik möglich gemacht und deren Charakter bestimmt. Wenn es wahr ist, dass, wie Whewell meint, das Wesen der Triumphe der Wissenschaft und ihres Fortschrittes darin besteht, dass wir veranlasst werden, Ansichten, welche unsere Vorfahren für unbegreiflich hielten und unfähig waren zu begreifen, für evident und nothwendig zu halten, so war die Erweiterung des Zahlenbegriffes auf das Irrationale, und wollen wir sogleich hinzufügen, das Imaginäre, der grösste Fortschritt, den die reine Mathematik jemals gemacht hat.

§. 17.

Die negativen Zahlen in der allgemeinen Grössenlehre.

Haben wir nun im Vorstehenden die Division vorgenommen, und wurden wir durch die Absicht, sie allgemein auszuführen, auf

die gebrochenen Zahlen geführt, so gehen wir jetzt über auf die Lysis der Addition von gleichartigen Grössen, welche durch $A\,e$, $B\,e\ldots$ dargestellt werden können, wo A, B positive Zahlen sind.

Die Gleichung

$$x + B\,e = A\,e$$

wird stets auflösbar sein, wenn $B\,e < A\,e$ und gibt $x = (A - B)\,e$, wo nun diese Differenz ganz den früheren, formal entwickelten Regeln genügt, und

$$x = (A - B)\,e = A\,e - B\,e$$

gesetzt werden kann. Die Differenz $(A\,e - B\,e)$ wird durch die actuelle Operation des Wegnehmens der B Einheiten von den A realisirt.

Enthält aber $B\,e$ mehr Einheiten als $A\,e$, so ist ein solches Wegnehmen im eigentlichen Sinne nicht mehr zulässig, wenigstens dann nicht, wenn man unter e eine eigentliche Substanz versteht. Bedeutet aber e, dessen Inhalt bis jetzt keinen Bestimmungen unterlegen hat, eine Relation (zwischen Objecten), deren positive Setzung ein conträres Gegentheil in der negativen Setzung hat, so dass eine Amalige positive Setzung sich mit der Amaligen negativen im Resultate gänzlich aufhebt, d. h. eine Relation eines Objectes zu sich selbst gibt, so kann die Subtraction allgemein ausgeführt werden (vergl. S. 5).

Bezeichnet man die zu e entgegengesetzte Relation mit $(-\,e)$ und deren Bmalige Wiederholung mit $B\,(-\,e)$, während die ursprüngliche Relation mit $+\,e$ bezeichnet werden kann, so wird die Gleichung

$$x + B\,e = A\,e$$

durch $x = A\,e + B\,(-\,e)$ in dem Falle, dass $B\,e > A\,e$ ist gelöst. Bezeichnet man aber die Lösung der Gleichung ganz allgemein mit $A\,e - B\,e$, so hat man $B\,(-\,e) = -\,B\,e$ oder $= (-\,B)\,e$ zu setzen, wo man im letzteren Falle das negative auf das B übertragen hat. Hienach darf denn $x = (A - B)\,e$ als allgemeine Lösung jener Gleichung angesehen werden, wenn die Differenz $(A - B)$ ganz die in §. 10 formaliter dargestellten Eigenschaften besitzt, und zwar auch die auf die Multiplication bezüglichen. Denn mag A eine positive oder negative Zahl sein, die Sätze über die

wiederholte Setzung, das associative und distributive Princip wie sie in §. 14 für die absolute Setzung angenommen werden mussten, gelten jetzt unverändert.

Wenn auch der Begriff des Negativen auf vielerlei Arten von Grössen angewandt werden kann (vergl. hierüber den interessanten Aufsatz von Kant: Versuch den Begriff der negativen Grössen in die Weltweisheit einzuführen. Sämmtliche Werke von Rosenkranz und Schubert Bd. I, S. 113), so sind doch vor allen Dingen die räumlichen und die zeitlichen Vorstellungen geeignet, ihn zur klaren Anschauung zu bringen. Namentlich bietet er sich in dem Begriffe der Zeit am natürlichsten dar. Wenn jedoch Hamilton (vergl. oben S. 17) meint, man müsse deshalb die ganze Lehre von den Zahlen auf die Phoronomie basiren, so scheint mir doch, wenn man einmal das abstracte Fundament aufgeben will, die Geometrie viel geeigneter, dies zu liefern; denn schon das Irrationale, noch viel mehr aber das Imaginäre, ist in der Zeit etwas durchaus nicht Anschauliches, von den vielen anderen Vorzügen der räumlichen Anschauung hier ganz abzusehen.

Anmerkung zu den §§. 14—17. Es ist von grosser Wichtigkeit zu bemerken, dass die erwähnten §§. keine Eigenschaft enthalten und enthalten können, welche ein, algebraisch gesprochen, additives Setzen von einem multiplicativen unterschieden; oder abstracter, das Zeichen $A\,e$ bedeutet nichts weiter als eine gewisse an e vorzunehmende Operation, welche gewissen Gesetzen genügt. Es hat daher nichts Widersprechendes, wenn wir statt $A\,e$ das Zeichen e^A gebrauchen, d. h. wenn wir unter e^A, A Factoren e verstehen; denn wenn man die Zahlen 1, 2, 3, ... durch die Reihe:

$$e^1 . e^1 = e^2,\ e^2\, e^1 = e^3, \ldots$$

bildet, so darf man

$$e^{A+B} = e^A\, e^B$$

setzen, wo unter $(A + B)$ die Summe in dem Sinne des §. 9 zu verstehen ist. Bringt man die Operation B an e^A an, so ist

$$(e^A)^B = e^{(A\,B)}$$

zu setzen. Denn die distributive Eigenschaft ist in den Formeln

$$(e^A)^{(B+\Gamma)} = e^{A\,B}\, e^{A\,\Gamma}$$

$$[e^{(A+B)}]^{\Gamma} = e^{A\,\Gamma}\, e^{B\,\Gamma}$$

erfüllt. Es ist hienach klar, wie die Gleichung

$$(e^B)^X = e^A$$

aufgelöst werden kann, und wie auch negative Exponenten zulässig sind, um e^{A-B} in jedem Falle ausführbar zu machen.

Man sieht hieraus, dass es in der That nicht genau war (s. S. 57), $A\,e$ als Product anzusehen. Denn wenn die Bezeichnung e^A dafür angewandt, und was leicht geschehen kann, eine diesem Zeichen in seiner algebraischen Be-

deutung entsprechende reale Operation untergelegt wird, so würde jene Verknüpfung ganz anderer Natur sein, obgleich sie genau denselben Gesetzen unterliegt.

Es liegt hierin zugleich ein Beispiel vor, wie die formalen Zahlen zur Bezeichnung von höheren Operationen in einem gewissen Zahlengebiet dienen können, welchen Gesichtspunkt der Operationscalcul weiter zu verfolgen hat (vergl. S. 13).

§. 18.

Das Operationssystem der Euklid'schen Geometrie.

Der Begriff der stetigen Grösse, mit dem wir bisher operirt haben, findet sein anschaulichstes Substrat in geometrischen Gebilden, der Strecke, dem Flächenraum, dem körperlichen Inhalt. Ein System von Operationen, welches dem der gemeinen arithmetischen 4 Species genau entspricht, und uns überdem in den Stand setzt, auch die Multiplication, die im Allgemeinen in anderen Grössengebieten nicht ausführbar ist, an jenen geometrischen Grössen mit gewissen Beschränkungen zu vollziehen, liefert uns die Geometrie des EUKLID:

Unter einer Summe zweier Strecken a, b versteht man die Strecke c, welche durch deren Aneinanderlegen in gerader Linie und so, dass eine Strecke ganz ausserhalb der anderen liegt, entsteht. Es leuchtet ein, dass dann:

$$a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Unter $a - b$ versteht man die Strecke, welche übrig bleibt, wenn man b von einem Endpunkte des a an so abträgt, dass b innerhalb a liegt; diese Operation ist nur möglich, wenn $a > b$.

Wie man die Addition und Subtraction auszuführen habe, lehrt EUKLID (Elemente I, 2 und 3). Es scheint mir, die Commutativität und Associativität der Addition der Strecken hätten in strenger Entwickelung als Lehrsätze aufgeführt werden sollen.

Ehe man aber vorstehende Operationen definitiv mit jenen Namen bezeichnen darf, muss eine der Multiplication entsprechende Operation definirt werden können.

Unter dem Producte $a . b$ verstehen wir das Rechteck, welches die Strecken a, b zu Seiten hat, und zwar seiner Fläche nach.

Die distributive Eigenschaft

$$a(b + c) = ab + ac$$

beweist EUKLID II, 1 und da man in diesem Sinne ohne weiteres

$$ab = ba$$

setzt, also die Fläche nur insofern berücksichtigt, als sie von den Strecken selbst, nicht von ihrer Reihenfolge abhängig ist, so hat man auch

$$(a + b)c = ac + bc$$

und es sind somit die Multiplicationsgesetze erwiesen, wenn noch

$$a(bc) = (ab)c.$$

Es folgt aber diese associative Eigenschaft sofort aus der Festsetzung, dass $a(bc) = (ab)c = abc$ ein rechtwinkliges Parallelepipedum mit den Seitenlängen a, b, c seinem Inhalte nach bezeichnet. Dass dann auch bei 3 Factoren das commutative Princip erfüllt ist und dass ebenso das distributive Princip gilt, ist ohne Weiteres klar, wenn man sich noch erinnert, dass man (EUKLID I, 42, 43, 44) ein Rechteck stets in ein anderes von gegebener Grundlinie verwandeln und daher eine Summe von Rechtecken stets wieder als ein solches darstellen kann. Ein Product von 4 Strecken hat keine geometrische Bedeutung.

Der Quotient $\frac{a}{b}$ zweier Strecken muss der Gleichung

$$\frac{a}{b}\, b = a$$

genügen, kann daher nichts anderes bedeuten, als eine gewisse Verkleinerung oder Vergrösserung der Strecke b, so dass eben a aus ihr hervorgeht, und ist also keine Grösse. —

Stellt man durch Vervielfachen und Theilen aus einer Strecke e alle anderen dar, so wird man jede solche

$$a = \mathcal{A}\, e$$

setzen können, wo $\mathcal{A}$ eine rationale Zahl ist; zwischen den so erhaltenen Strecken liegen noch andere, die mit e incommensurabel sind und durch $\mathcal{A}\, e$ mit irrationalem $\mathcal{A}$ dargestellt werden.

Ist nun eine solche Darstellung der Strecken durch Zahlen möglich, so fragt es sich doch, ob das, was wir Summe und Product zweier Strecken genannt haben, sich auch durch Addition und Multiplication jener Zahlen ausdrücken lässt.

Dass dies bei der Addition der Fall ist, bedarf keiner Erörterung.

So lange A, B rational sind, kann man leicht zeigen, dass das Product der Strecken im obigen Sinne:

$$a\,b = A\,e\,.\,B\,e = (A\,B)\,e\,e$$

ist, und man schliesst daraus auch auf Gültigkeit dieser Gleichung für Strecken, die gegen e incommensurabel sind. Ebenso ist immer:

$$a\,b\,c = A\,B\,\Gamma\,.\,e\,e\,e$$

und obige Definition des Quotienten liefert den Satz, dass

$$\frac{a}{b} = \frac{A\,e}{B\,e} = \frac{A}{B}.$$

Die den allgemeinen formalen Bedingungen der Addition und Multiplication genügenden EUKLID'schen geometrischen Operationen können somit, wenn die Strecken durch $A\,e$ dargestellt werden, wo A eine positive Zahl bedeutet, durch die gewöhnlichen arithmetischen entsprechenden Operationen ersetzt werden: In einem Producte von 2 oder 3 Grössen sind die Factoren e mit ihren Zahlencoefficienten jederzeit vertauschbar. Das System der reellen positiven Zahlen mit seinen Operationen kann das ganze System von Strecken mit seinen Operationen vollkommen vertreten.

Ich habe mich hier der heute gewöhnlichen Darstellung, welche die irrationalen Zahlen als Grenzfälle der rationalen behandelt, anschliessen zu sollen geglaubt und zwar einzig aus dem Grunde, um nicht ein Kapitel einschalten zu müssen, welches, den Elementen der Geometrie entlehnt, allerdings in einem vollkommen strengen Systeme der Mathematik nicht fehlen darf, welches aber in diesem Werke nicht von wesentlicher Bedeutung wäre. Doch können wir die Bemerkung nicht unterdrücken, dass die heut zu Tage übliche Behandlung der irrationalen Grössen in der Geometrie eine der Sache nicht adäquate ist, insofern sie in der unnatürlichsten Weise das Zusammengehörige trennt und das Stetige, als welches ein geometrisches Gebilde seinem Wesen nach erscheint, in die Fessel des Discreten zwingt, welche es dennoch jeden Augenblick wieder zerreisst. Es gibt nur einen wissenschaftlichen Weg, die Lehre von der Aehnlichkeit, die heute auf die Darstellung der Strecken in der Form $a = A\,e$ und auf die Rechnungsregeln der Zahlen gegründet zu werden pflegt, zu behandeln und dieser ist der von EUKLID im 5. und 6. Buche seiner Elemente eingeschlagene — ein Weg, der seit lange nicht anerkannt, ja sogar meistens vollständig missverstanden worden ist, der aber an Strenge, Eleganz und Sachgemässheit nicht übertroffen werden kann. Auf diesem erscheint das Irrationale als dem Rationalen vollkommen gleich-

artig; die Aehnlichkeitslehre beruht auf einer Definition der Proportion, welche von jenem Unterschiede gänzlich abstrahirt und abstrahiren muss, weil sie die Grössen bereits als fertige und nicht durch einen unstetigen Process zerstückte ansieht. Erst aus der Aehnlichkeitslehre ergibt sich der wahre Begriff der Zahl A, welche in der Verbindung Ae eine Streckung der Einheit e in einem gegebenen Verhältnisse ausdrückt.

Zufolge der Lehre von der Aehnlichkeit muss jede Relation zwischen Strecken $a, b, \ldots$ ihren Producten und Quotienten unabhängig von der Einheits-Strecke e sein, durche welche alle Strecken $a = Ae$, $b = Be, \ldots$ ausgedrückt werden, muss also zwischen den Zahlen $A, B, \ldots$ selbst stattfinden. Hierauf beruht die Möglichkeit der Berechnung geometrisch zusammenhängender Gebilde auseinander und daher die Möglichkeit der Anwendung arithmetischer und algebraischer Sätze auf die Geometrie. Wenn Legendre (Éléments de Géom. II. Note) umgekehrt aus der vorausgesetzten Anwendbarkeit der Algebra auf die Geometrie die Aehnlichkeitslehre ableiten will, so ist dies ein ὕστερον πρότερον, vor welchem das Studium des Euklid die Wissenschaft hätte bewahren können (vgl. Möbius baryc. Calcul S. 190 und Brewster Uebersetzung der Éléments Legendre's Note II).

Verliert die Aehnlichkeitslehre ihre Richtigkeit, so ist die Grössenbeziehung von gesetzmässig auseinander construirten Strecken nicht mehr unabhängig von der zu Grunde gelegten Einheit, reducirt sich also nicht auf eine Zahlenbeziehung.

Dieser Fall mit allen seinen paradoxen Forderungen tritt aber ein, wenn das Euklid'sche Postulat der Parallelentheorie nicht mehr gilt, in der transscendentalen Geometrie, wie sie von Gauss (bereits im Jahre 1792, s. Briefwechsel mit Schumacher, Bd. II, S. 269 und S. 431, Bd. V, S. 47), von Johann Bolyai (Tentamen juventutem stud. in elementa math.... introducendi, Maros Vasarhelyini 1832, Bd. I. Appendix) und Lobatschewsky (Geom. Unters. z. Theorie der Parallellinien, Berlin 1840) entwickelt worden ist. „In dieser Geometrie gibt es gar keine ähnliche Figuren ohne Gleichheit, z. B. die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind nicht blos von $^2/_3$ R, sondern auch nach Massgabe der Grösse der Seiten unter sich verschieden und können, wenn die Seite über alle Grenzen wächst, so klein werden, wie man will. ... Hierin ist aber nichts Widersprechendes, wenn der endliche Mensch sich nicht vermisst, etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen. — Sie sehen, dass hier in der That der Fragepunkt unmittelbar an die Metaphysik streift.“ (Gauss, Brief von 1831, a. a. O., Bd. II, S. 269).

FÜNFTER ABSCHNITT.

Die gemeinen imaginären Zahlen.

§. 19.

Formale Theorie der imaginären Zahlen.

Wurden wir von den positiven ganzen Zahlen aus, durch Auflösung linearer Gleichungen auf die negativen Zahlen geführt, so gelangen wir durch die Absicht, auch die quadratischen Gleichungen in jedem Falle auflösbar zu machen, nicht allein zu den vorstehends betrachteten irrationalen Zahlen, welche sich interpolirend in die Reihe der rationalen einfügen, sondern noch zu einer neuen Klasse qualitativ verschiedener Zeichen:

Wir bezeichnen nämlich eine Lösung der Gleichung

$$x x = -1$$

mit $x = i$, so dass

$$i i = -1.$$

Dieses i ist jedenfalls gänzlich verschieden von allen reellen Zahlen; es ist weiter nichts als ein Zeichen für ein eingebildetes, mentales Object, welches man die imaginäre Einheit nennt, dessen eigentliches Wesen aber in der reinen Theorie ganz unbestimmt bleibt und bleiben muss, da wir uns in dieser nur mit seinen formalen Verknüpfungen zu beschäftigen haben, deren Gesetze wir nach dem Princip der Permanenz bestimmen werden. Dazu nehmen wir an, dass das Product reeller Zahlen und imaginärer Einheiten associativ und commutativ sei und das distributive Princip in der Form $(A + B)\, i = A i + B i$ erfüllt werde, so dass der Verknüpfung $A\, i$ mit Recht der Name „Product" zugeschrieben werden kann. Wir

nehmen weiter an, dass $A + Bi = Bi + A$ und definiren die Summe durch:

$$(A + Bi) + (\Gamma + \Delta i) = (A + \Gamma) + (B + \Delta)i$$

Dann ist, wie man sehr leicht übersieht, das commutative und associative Princip bei der Addition erfüllt; denn es ist:

$$\{(A+Bi) + (\Gamma+\Delta i)\} + (E+Zi) = \{(A+\Gamma) + (B+\Delta)i\} + (E+Zi)$$
$$= [(A + \Gamma) + E] + [(B + \Delta) + Z]i$$
$$= (A + \Gamma + E) + (B + \Delta + Z)i.$$

Definirt man das Product durch:

$$(A + Bi)(\Gamma + \Delta i) = A\Gamma + A\Delta i + B\Gamma i + B\Delta ii$$

so ist dasselbe ersichtlicher Weise commutativ; ferner hat man:

$$[(A + Bi) + (A' + B'i)]\ [(\Gamma + \Delta i) + (\Gamma' + \Delta' i)] =$$
$$[(A + A') + (B + B')i]\ [(\Gamma + \Gamma') + (\Delta + \Delta')i] =$$
$$= (A+A')(\Gamma+\Gamma') + (A+A')(\Delta+\Delta')i + (B+B')(\Gamma+\Gamma')i +$$
$$+ (B+B')(\Delta+\Delta')ii$$
$$= (A\Gamma + A\Delta i + B\Gamma i + B\Delta ii) + (A\Gamma' + A\Delta' i + B\Gamma' i + B\Delta' ii)$$
$$+ (A'\Gamma + A'\Delta i + B'\Gamma i + B'\Delta ii)$$
$$+ (A'\Gamma' + A'\Delta' i + B'\Gamma' i + B'\Delta' ii)$$
$$= (A + Bi)(\Gamma + \Delta i) + (A + Bi)(\Gamma' + \Delta' i)$$
$$+ (A' + B'i)(\Gamma + \Delta i) + (A' + B'i)(\Gamma' + \Delta' i)$$

und dies ist das distributive Princip. Da nach der Definition

$$[(A + Bi)(\Gamma + \Delta i)]\ [E + Zi] =$$
$$= [A\Gamma + (A\Delta + B\Gamma)i + B\Delta ii]\ [E + Zi]$$
$$= A\Gamma E + (A\Delta E + B\Gamma E + A\Gamma Z)i$$
$$+ (A\Delta Z + B\Gamma Z + B\Delta E)ii + B\Delta Ziii,$$

und das Product

$$[A + Bi]\ [(\Gamma + \Delta i)(E + Zi)]$$

dieselbe Entwickelung gibt, so ist auch das associative Princip bei der Multiplication erfüllt.

Wir werden diese Zahlen $(A + Bi)$ im Folgenden meistens durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabetes $a, b\ldots$ bezeichnen, und sie complexe Zahlen, und zum Unterschiede von

anderen die gemeinen oder gewöhnlichen complexen Zahlen nennen. Es gelten für sie nach unseren formalen Bestimmungen, welche nicht einmal von der Annahme $ii = -1$ Gebrauch machen, alle Verknüpfungsgesetze und zwar ausdrücklich auch die commutative Multiplication, ebenso wie für reelle Zahlen, nicht aber die Gesetze, welche für letztere aus ihrer realen Bedeutung in der Grössenlehre abgeleitet werden können, und welche theilweise, wie z. B. der Satz $A\,A > 0$ für complexe Zahlen ganz ihren Sinn verlieren. Die für reelle Zahlen erwiesene Eindeutigkeit der Addition findet auch hier statt; es ändert sich eine Summe, wenn sich das eine Glied ändert, während das andere constant bleibt. Denn zwei complexe Zahlen sind nur dann einander gleich

$$A + B\,i = \Gamma + \Delta\,i,$$

wenn $A = \Gamma$, $B = \Delta$; da, wenn dies nicht der Fall wäre, aus:

$$(A - \Gamma) + (B - \Delta)\,i = 0$$

sich i durch reelle Zahlen darstellen liesse und sein Quadrat nicht -1 sein könnte.

Es fragt sich weiter, ob ein Product

$$(A + B\,i)\,(\Gamma + \Delta\,i) = E + Z\,i$$

verschwinden könne, ohne dass einer seiner Factoren Null wird. Aus der leicht zu beweisenden Gleichung

$$(A^2 + B^2)\,(\Gamma^2 + \Delta^2) = E^2 + Z^2$$

sieht man aber, dass das Verschwinden eines Productes stets das eines Factors bedingt, wenn die complexen Zahlen reelle Coefficienten haben und die imaginäre Einheit in den Factoren eine und dieselbe ist.

Von fundamentaler Bedeutung für das vorliegende Zahlensystem ist offenbar die Beantwortung der meistens ganz übersehenen Frage, ob und unter welchen Bedingungen das Zeichen i überhaupt ein einziges, bestimmtes ist, d. h. ob die Gleichung $x\,x = -1$ ausser der Wurzel i noch andere haben kann, oder nicht. Es ist zunächst klar, dass, wenn man mit i eine Wurzel der Gleichung $x\,x = -1$ bezeichnet, auch $x = -i$ eine Wurzel derselben ist, und daher die Gleichung

$$x\,x + 1 = (x + i)\,(x - i)$$

stattfindet.

An und für sich steht aber nichts im Wege, noch andere Zeichen $\varkappa$, λ, ... als Lösungen derselben Gleichung, also $\varkappa\varkappa = -1$, $\lambda\lambda = -1$, ... anzunehmen. Solche Zeichen, welche als neue imaginäre Einheiten anzusehen wären, erhalten aber ihre formale Bedeutung erst dadurch, dass wir die Regeln festsetzen, nach welchen mit ihnen zu operiren ist. Nehmen wir nun an, dass auch, wenn x einem dieser Zeichen gleich ist, das distributive Princip zwischen x und i wenigstens so weit gilt, dass

$$(x + i)(x - i) = x\,x + i\,x - x\,i - i\,i$$

und dass ferner das commutative Gesetz $x\,i = i\,x$ gilt, so dass auch jetzt $(x + i)(x - i) = x\,x + 1$, so wird man trotzdem noch nicht behaupten dürfen, dass $x\,x + 1 = 0$ nur durch $x = \pm i$ erfüllt sei, wenn man nicht die zur Permanenz der Gesetze arithmetischer Operationen wesentliche Bedingung hinzufügt, dass ein Product nicht Null werden könne, ohne dass einer seiner Factoren verschwindet.

Nur wenn alle diese Bedingungen als erfüllt angenommen werden, kann man die Lösung der Gleichung $x\,x + 1 = 0$ in jedem Falle durch eins der Zeichen $\pm i$ ausdrücken, und ist das Zeichen oder die Zahl i in ihrer Bedeutung vollkommen bestimmt. Wird eines dieser Postulate, welche als arbiträre Annahmen erscheinen und eben als solche das gewöhnliche complexe Zahlensystem von allen anderen charakteristisch unterscheiden, fallen gelassen, so kann die Gleichung $xx = -1$ mehr Wurzeln als jene $\pm i$ haben, wie sie denn in der That in der Theorie der Quaternionen, wo alle angegebenen Bedingungen mit Ausnahme der letzten erfüllt sind, unendlich viele Wurzeln besitzt, vergl. §. 30 und §. 45.

Jene Bedingung, dass ein Product nur verschwinden solle, wenn einer seiner Factoren Null ist, liefert sogleich den weiteren Satz, dass ein Product complexer Zahlen sich jedesmal ändert, wenn sich einer seiner Factoren ändert; denn jedesmal, wenn b nicht Null und $a\,b = a'\,b$ ist, hat man $(a - a')\,b = 0$, so dass $a - a' = 0$, $a = a'$. Daraus folgt dann weiter die vollkommene Eindeutigkeit der Division in dem gemeinen complexen Zahlensysteme, mit Ausnahme der Division durch Null.

Eine Folge dieser Eindeutigkeit ist weiter das eine fundamentale Princip der Algebra, dass eine ganze algebraische Function

$$f\,x = x^n + a_1\,x^{n-1} + \ldots + a_n$$

den Factor $(x - x_1)$ besitzt, wenn $f\,x_1 = 0$, und, wenn sie n solche Wurzeln $x_1 \ldots x_n$ hat, die Function nicht für noch irgend einen anderen Werth aus dem gemeinen complexen Zahlensysteme verschwinden kann. Denn bringt man sie in die Form:

$$f\,x = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

so müsste dies Product für $x = x_{n+1}$ Null werden, ohne dass einer der Factoren Null würde, was der Natur unseres Systemes entgegen ist, während in anderen Systemen, z. B. dem der Quaternionen neben den n complexen Wurzeln im Allgemeinen noch andere Wurzeln bestehen können.

Historisches. Es ist hier nicht der Ort, die allmählige Einführung der imaginären Grössen in die Algebra historisch zu verfolgen. In der Mitte des 16. Jahrhunderts traten sie schon bei den italienischen Algebristen als „unmögliche" auf; der erste, der sie als eigentliche Auflösungen ansah, scheint Albert Girard (Invention nouvelle en l'Algèbre, Amsterdam 1629) zu sein. Die Ausdrücke „reell" und „imaginär" in Bezug auf die Wurzeln einer Gleichung kommen zuerst in Descartes' „Géometrie" 1637 vor. Man sehe über die ältere Geschichte Klügels math. Wörterbuch. Art. Algebra. Der Name „complexe Zahl" für $A + Bi$ und der „Norm" für $(A^2 + B^2)$ ist von Gauss in der berühmten Anzeige seiner zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste und in dieser selbst, im Jahre 1831 (s. Gauss' Werke Bd. II) gegeben. Der Name des „Moduls" für $\sqrt{A^2 + B^2}$ findet sich zuèrst bei Argand 1814 (Gergonne's Ann. Bd. V, S. 208). Der Name „reducirte Form" für die Darstellung $A + Bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist von Cauchy (Cours d'analyse 1821) eingeführt. Wir werden den Factor $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ häufig den Richtungscoefficienten nennen.

Waren die complexen Zahlen auch besonders in Euler's Händen zu einem mächtigen analytischen Werkzeug, und in der Algebra unbedingt nothwendig geworden, und hatte auch Cauchy schon eine Theorie ihrer Functionen weit ausgeführt, so blieben sie doch „noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erschienen also mehr wie ein an sich inhaltleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dies Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Grössen steuert, verschmähen zu wollen". Gauss hat das grosse Verdienst, durch seine präcise Darstellung (1831 a. a. O.) und seine gewichtige Autorität alle Bedenken gegen ihre Einführung vernichtet zu haben. Was aber die imaginäre Einheit eigentlich sei, ob eine mögliche oder unmögliche Grösse, eine Zahl, ein an sich nichts bezeichnendes Symbol, ein Affectzeichen,

oder was sonst — mit einem Worte, die wahre Metaphysik des Imaginären liegt in den meisten Darstellungen bis heute sehr im Argen und eine Begriffs- und Sprachverwirrung, wie die S. 14 dargestellte, kehrt nur allzuoft wieder. Es ist hier nicht möglich auf die unzähligen Expositionen des Begriffes des Imaginären einzugehen und die von mir systematisch durchgeführte Ansicht polemisch zu vertreten; mehr oder minder kommen ihr viele scheinbar sehr nahe. Wie bedeutend sich aber meine Darstellung von der gewöhnlichen, der Sache nach, unterscheidet, wird schon zur Genüge aus dem einen Umstand ersehen, dass eine Untersuchung über die charakteristische Bestimmtheit des complexen Systemes, durch die arbiträre Bedingung, dass ein Product nur durch das Nullwerden eines seiner Factoren verschwinden solle, nirgends gefunden wird, obgleich ohne sie kein klarer Begriff von seinem Wesen erlangt werden kann. Es fehlt eben meistens an einem allgemeinen Gesichtspunkte; erst durch die Behandlung der gewöhnlichen imaginären Zahlen nach denselben Principien und in Gemeinschaft mit den höheren complexen Zahlen kann ihre wahre Bedeutung in das volle Licht gesetzt werden.

Die schon S. 17 erwähnte Theorie Sir W. R. Hamilton's besteht kurz in Folgendem: Während sich die gewöhnliche allgemeine Arithmetik mit den reellen Zahlen selbst beschäftigt, so kann man eine weitere Algebra der „couples" (A, B) aufstellen, deren Verknüpfungsgesetze willkührlich gewählt werden können, nur mit Rücksicht darauf, dass sie im Falle $B = 0$ mit denen für $(A, 0) = A$ zusammenfallen. Man setze

$$(A, B) + (\Gamma, \Delta) = (A + \Gamma, B + \Delta)$$

$$(A, B)(\Gamma, \Delta) = (A\Gamma - B\Delta, A\Delta + B\Gamma)$$

Dann ist

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

also könnte $(0, 1) = \sqrt{-1} = i$ zur Abkürzung gesetzt werden, obgleich es räthlich erscheint, $(0, 1)$ beizubehalten, da in diesem couple nicht einmal der Schein irgend einer Unmöglichkeit vorhanden ist.

Die Auflösung einer quadratischen Gleichung wird so auf die Ermittelung zweier reeller Zahlen, X, Y hinauskommen, welche der Gleichung

$$(X, Y)^2 + (A, B)(X, Y) + (\Gamma, \Delta) = (0, 0)$$

genügen. Daraus folgt

$$X^2 - Y^2 + AX - BY + \Gamma = 0$$

$$2XY + AY + BX + \Delta = 0$$

also z. B. für die Gleichung

$$(X, Y)^2 + A(X, Y) + \Gamma = 0$$

speciell

$$X^2 - Y^2 + AX + \Gamma = 0, \; 2XY + AY = 0.$$

Ist $\frac{1}{4}A^2 - \Gamma > 0$, so nimmt man den Factor $Y = 0$ aus der zweiten Gleichung und löst dann die Gleichung

$$X^2 + AX + \Gamma = 0$$

in ihre reellen Wurzeln auf. Ist $\frac{1}{4}A^2 - \Gamma < 0$, so nimmt man den anderen Factor $2X + A = 0$ und erhält für Y die Gleichung

$$Y^2 = \Gamma - \tfrac{1}{4}A^2,$$

also zur Auflösung der ursprünglichen quadratischen Gleichung im ersten Falle

$$\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4\Gamma}}{2}, 0\right)$$

im zweiten

$$\left(-\frac{A}{2}, \pm\frac{\sqrt{4\Gamma - A^2}}{2}\right).$$

Das ist Hamilton's Gesichtspunkt. Es bedarf aber kaum der Bemerkung, dass er durch die nothwendige Trennung in einzelne Fälle überall die Allgemeinheit der Entwickelung beeinträchtigt, und in's Besondere die allgemeinen Sätze der Functionentheorie, welche wesentlich auf einer unbeschränkten Variabilität Einer Veränderlichen beruhen, sich nur widerstrebend dieser Fassung unterordnen würden.

Ganz derselbe Vorwurf einer der Sache nicht adäquaten Behandlung trifft die in dem „Mémoire sur la théorie des équivalences algébriques, substituée à la théorie des imaginaires" (Exercices d'anal. et de phys. math. Bd. 4. 1847. S. 87) gegebene allerdings scharfsinnige Theorie Cauchy's, die er zum Ersatze seines früheren Galimatias (s. S. 14) vorschlug; und die neuerdings von Grunert wieder in grösster Ausführlichkeit (s. Archiv d. Math. u. Phys. Bd. 44, No. 26, 27, Bd. 45, No. 29) behandelt worden ist. Er betrachtet in dieser nur reelle Grössen; es ist ihm i eine solche und zwar allgemein reelle Veränderliche. „Aequivalent" heissen ihm zwei ganze Functionen von i, wenn sie durch $(i^2 + 1)$ getheilt, beide denselben Rest lassen. Dann ist in diesem Sinne:

$$i^{4m} \equiv 1, \; i^{4m+1} \equiv i, \; i^{4m+2} \equiv -1, \; i^{4m+3} \equiv -i$$

Man hat, weil i reell ist:

$$(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + (\alpha\delta + \beta\gamma) i + \beta\delta i^2$$

und somit:

$$(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) \equiv \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma) i.$$

Es werden diese Bemerkungen genügen, um das Wesen dieser Methode in's Licht zu setzen, welche neben den schon angeführten wesentlichen Nachtheilen noch den besitzt, überall eine Entwickelbarkeit nach Potenzen von i vorauszusetzen.

§. 20.

Die geometrische Addition von Strecken in der Ebene und im Raume.

In §. 18 wurden Strecken ausschliesslich in Bezug auf ihre absolute Grösse mit einander verknüpft. Ein anderes für die

Geometrie äusserst wichtiges System von Operationen erhält man, wenn man gleichzeitig Grösse und Richtung verwerthet, und dem zufolge zwei Strecken AB, EF, allgemein im Raume, dann und nur dann als gleich betrachtet, wenn sie gleich lang, parallel und gleichgerichtet sind, also $ABFE$ ein Parallelogramm bilden.

Was nun die Addition solcher Strecken betrifft, die durch Bewegung eines Punktes von dem Anfangs- zum Endpunkte entstanden gedacht werden können, so betrachten wir zunächst die gleichgerichteten Strecken, welche nach dem angegebenen Begriffe der Gleichheit sämmtlich auf eine und dieselbe Gerade verlegt und in dieser beliebig verschoben werden können. Sind zwei solche Strecken AB, EF zu addiren, so wird man EF so verschieben, dass ihr Anfangspunkt mit B zusammenfällt, und $EF = BC$ setzen. Als Summe $AB + BC$ wird man dann die ganze Strecke AC anzusehen haben.

Um zwei irgendwie im Raume liegenden Strecken AB, EF zu addiren, wird man zunächst EF parallel mit sich so verschieben, dass ihr Anfangspunkt nach B kommt, und $EF = BC$ machen. Dann setzt man (Fig. 1):

$$AB + BC = AC$$

und nennt diese Strecke AC, um sie von der Summe im früheren Sinne zu unterscheiden, wohl auch geometrische Summe der beiden Strecken AB, BC. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist seine dritte Seite, oder wenn man

$$AB + BC + CA = 0$$

schreibt, die Summe der in einerlei Sinn genommenen drei Seiten eines Dreiecks ist Null.

Dass dieser Additionsbegriff allen formalen Bedingungen der §§. 6, 7 genügt, kann leicht gezeigt werden. Zunächst ist

$$a + b = b + a;$$

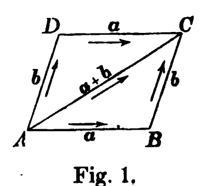


Fig. 1.

denn sei $a = AB$, $b = BC$, so ist $a + b = AC$; vollendet man das Parallelogramm, dessen Diagonale AC ist, so dass $a = DC$, $b = AD$ wird, so hat man $b + a = AD + DC = AC$. Die Addition ist also commutativ.

Dass sie associativ ist, geht aus folgender Betrachtung hervor:

Es seien die drei Strecken (Fig. 2) so aneinandergefügt, dass sie die Seiten AB, BC, CD eines Parallelepipedum bilden, dann hat man $a + b = AB + BC = AC$ und

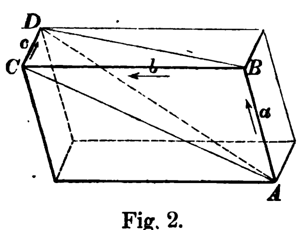


Fig. 2.

$$(a + b) + c = AC + CD = AD$$

Ferner ist $b + c = BC + CD = BD$ also

$$a + (b + c) = AB + BD = AD.$$

Auch ist die Summe durch ihre Summanden eindeutig bestimmt und ändert sich, wenn sich eines der Glieder ändert, während das andere constant bleibt.

Was die Differenz zweier Strecken $(a - b)$ betrifft, so muss ihrer Definition nach $(a - b) + b = a$ sein. Wird nun (Fig. 3) $b = AD$, $a = AB$ gesetzt, so ist die Strecke $(a - b)$ so zu bestimmen, dass $AD + (a - b) = AB$; das aber gibt $a - b = DB$.

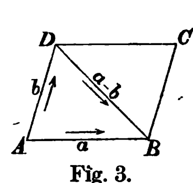


Fig. 3.

Die Differenz zweier Strecken

$$AB - AD = DB$$

ist also die Strecke, welche, wenn man die zu subtrahirende Strecke b mit ihrem Anfangspunkte an den Anfangspunkt von a bringt, den Endpunkt ersterer mit dem Endpunkte letzterer verbindet.

Eine solche, die Differenz darstellende Strecke existirt stets, was auch ihre Glieder seien. Man kann also wie in §. 6 jede Differenz in eine Summe verwandeln, wenn man negative Strecken einführt. Bemerkt man, dass die Strecke $AA = 0$, so hat man $0 - AD = DA$ oder $DA = -AD$, zu setzen. Eine einer anderen entgegengesetzt gerichtete Strecke ist also die negative der ersteren.

Vermöge der Gleichheit aller parallelen und an Länge gleichen Strecken, kann man sie sämmtlich von einem Punkte O ausgehend denken (Fig. 4) und $a = OA$, $b = OB$, ... setzen, so dass man auch die Strecken sich durch diese Endpunkte A, B, ... vertreten denken kann. Man erhält so die Summe $OA + OB = OC$, indem man das Parallelogramm $BOAC$ construirt; die Differenz

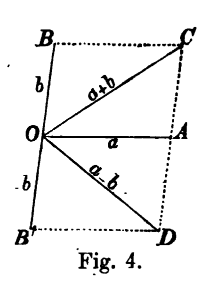


Fig. 4.

$OA - OB = OD$ aber, indem man $OB = B'O$ macht und das Parallelogramm $B'OAD$ vollendet.

Dass man unter einer Strecke $\mathfrak{a}\, a$, wo $\mathfrak{a}$ eine reelle positive oder negative Zahl bedeutet, eine solche zu verstehen habe, welche dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung von a hat, und deren Grössenverhältniss zu a durch den absoluten Werth von $\mathfrak{a}$ bestimmt wird, liegt auf der Hand.

Haben wir nun nachgewiesen, dass unser Additionsbegriff allen formalen Bedingungen genügt, so muss doch gefragt werden, wie man zu ihm gelange, ob es der einzig mögliche oder nur einer unter vielen sei.

Das Wesen der actuellen Addition von einfachen Grössen kann in seinem weiteren Begriffe etwa so gefasst werden: Durch die Addition werden zwei Objecte, welche durch ein und dasselbe Element in seinen Veränderungen, seien diese nun stetige oder unstetige, erzeugt werden, synthetisch so verbunden, dass als Resultat ein neues Object erhalten wird, welches durch eine Veränderung des erzeugenden Elementes auch direct gebildet werden könnte. Sehen wir daher als Grundelement einen Punkt an, der durch seine Bewegung eine Strecke erzeugt, so führt uns jener allgemeine Begriff der actuellen Addition sofort zu dem obigen. In rein mathematischer Weise werden wir den obigen Additionsbegriff durch Verknüpfung von Punkten in §. 33 erhalten. Hier mag es genügen, darauf aufmerksam gemacht zu haben, dass jene Addition auf einer sehr natürlichen Anschauung beruht und dass sie mehr als eine, wie man zuweilen gemeint hat, „abgekürzte Bezeichnung" ist; man müsste denn die ganze reine Mathematik, mit ihrem Calcul, ihrem Algorithmus und ihren Functionen, auch nur als „abgekürzte Bezeichnung" ansehen. Ist Wissenschaft überhaupt im nominalistischen Sinne eines Condillac nur eine „langue bien faite", so muss sie doch eben „bien faite" sein, d h. ihre Begriffe müssen angemessen sein und einen realen Hintergrund haben, ohne den sie leer und abstrus bleiben. Reine Verknüpfung von Worten, die willkührlich gewählt sind, kann niemals Wahrheiten liefern, die sich auf die Dinge selbst beziehen.

Die Frage nach der Angemessenheit und Wahrheit des obigen Additionsbegriffes, dessen formale Richtigkeit durch die Beweisführung des §. verbürgt ist, interessirt mehr als die reine Geometrie, noch die Mechanik. Denn bleiben wir bei der Darstellung der Strecken von einem Punkte O aus, stehen, so coincidirt die Addition der Strecken mit dem mechanischen Begriffe der Zusammensetzung von Kräften, welche durch jene Strecken als am Punkte O angreifende dargestellt werden. Die mechanische Addition von Kräften hat ihrem Begriffe nach alle Eigenschaften des formalen Additionsbegriffes, die

associative, commutative und die der vollkommenen Eindeutigkeit. Auf diesen Eigenschaften und dem Principe der Homogeneität, d. h. dem Axiom, dass die Summe zweier Kräfte eine neue Kraft sei, welche sich mit den gegebenen Kräften proportional ändert, beruhen nun alle jene zahllosen Beweise für das Parallelogramm der Kräfte, von denen ich nur den bekanntesten, den von POISSON (Traité de mécanique. Bd. I, S. 43) hier anführe. Alle diese Beweise haben etwas Unbefriedigendes, auch wenn sich gegen ihre formelle Richtigkeit nichts beibringen lässt, so dass man neuerdings sehr geneigt ist, das Parallelogramm der Kräfte direct unter die Axiome aufzunehmen.

Das Raisonnement POISSON's kann von jeder mechanischen Vorstellung frei gemacht und rein als ein Beweis für den Satz betrachtet werden, dass es mit Annahme der Homogeneität, nur die im Text gelehrte Addition von Strecken gibt. Sieht man nun genauer nach, worin das Unbefriedigende seiner Anwendung in der Mechanik liegt, so wird man finden: in der stillschweigend gemachten Voraussetzung, dass man Kräfte durch Linien darstellen könne — einer Hypothese, welche sehr viel Unklares enthält, wenn man Zug- oder Druckkräfte und deren statische Verhältnisse im Auge hat. Betrachtet man aber eine Kraft nur, insofern sie eine Bewegung hervorbringt, und misst sie durch die Geschwindigkeit, welche sie in einer bestimmten Richtung in der Zeiteinheit der Masseneinheit ertheilt, so kann man ohne Bedenken Kräfte durch Linien darstellen. Sieht man ferner Kräfte als gleich an, wenn sie einem bewegten Körper an verschiedenen Stellen seiner Bahn gleiche und parallele Geschwindigkeiten ertheilen würden, so kann man dies nach unserem Begriffe der Strecke in den einen Satz zusammenfassen: Kräfte werden durch Strecken dargestellt. Unter diesen Voraussetzungen kann man dann aus den oben angegebenen formalen Eigenschaften ihrer Addition das Parallelogramm der Kräfte allerdings ableiten. —

Die Addition der Strecken ist von den Schriftstellern über die geometrische Darstellung der imaginären Zahlen, zuerst von ARGAND (s. S. 82) gelehrt worden. Unabhängig davon hat sich BELLAVITIS (Ann. d. scienze d. regno Lomb. Venet. 1835. Bd. 3) und MÖBIUS (Mechanik des Himmels. Leipzig 1843) ihrer bedient.

§. 21.

Commutative Multiplication von Strecken einer Ebene.

Konnten wir die Addition von Strecken sogleich für den nach drei Dimensionen ausgedehnten Raum aufstellen, so werden wir die Multiplication von Strecken im Raume auf den VII. und IX. Abschnitt verschieben und zuvörderst nur die der Strecken in einer Ebene betrachten, die wir uns der Einfachheit wegen sämmtlich als von einem Punkte O ausgehend denken.

Als Definition setzen wir fest, dass die beiden Quotienten der nach Länge und Richtung betrachteten Strecken (Fig. 5)

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OF}{OE} \qquad (1^*)$$

gleich sind, wenn die Dreiecke BOC und EOF ähnlich sind, also für die absoluten Längen

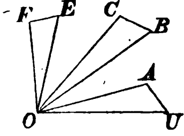


Fig. 5.

$$\overline{OB} : \overline{OC} = \overline{OE} : \overline{OF}$$

und für die Winkel

$$\angle BOC = \angle EOF.$$

Es sei ferner eine Strecke OU, als Modul der Multiplication, ein für allemal festgesetzt, deren Product oder Quotient in irgend eine Strecke, dieselbe wieder darstellt, so dass

$$\frac{OA}{OU} = OA.$$

Dann kann man OA so bestimmen

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OU} \text{ also } \frac{OC}{OB} = OA,$$

wenn nämlich $BOC \backsim UOA$ oder

$$\overline{OB} : \overline{OC} = \overline{OU} : \overline{OA}$$

$$\angle BOC = \angle UOA$$

Aus jener Gleichung ergibt sich:

$$OC = OA . OB$$

Als Product zweier Strecken $OA . OB$ erscheint daher eine neue Strecke OC, so dass $COB \backsim AOU$ oder übersichtlicher

$$\overline{OC} : \overline{OB} = \overline{OA} : \overline{OU}, \quad \overline{OC} . \overline{OU} = \overline{OA} . \overline{OB} \qquad (1)$$

und

$$\angle UOC = \angle UOA + \angle UOB \qquad (2)$$

welche zwei Gleichungen leicht in Worte gefasst werden können, wenn man den Winkel UOC die Anomalie der Strecke OC nennt.

Das Product zweier Strecken besitzt die Eigenschaft der vollkommenen Eindeutigkeit. Nur wenn ein Factor $OO = 0$ ist, ändert es seinen Werth 0 nicht, wenn sich der andere Factor ändert. Der Fall, dass OB, OA in der Geraden OU liegen, erfordert noch eine Bemerkung, da in ihm das Dreieck AOU in eine Linie zusammen-

klappt. Man hat dann aus (2), $\angle\, UOC = 0$ oder π je nachdem OA, OB gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, und die somit nach der Seite von OU oder der entgegengesetzten aufzutragende Strecke OC wird ihrer Länge nach aus (1) bestimmt.

Dass das Product commutativ ist, geht unmittelbar aus dem Anblick von (1), (2) hervor. Es ist ferner:

$$(OA.OB)\,OD = OC.OD = OE$$

wenn

$$\overline{OC}.\overline{OU} = \overline{OA}.\overline{OB},\ \overline{OC}.\overline{OD} = \overline{OE}.\overline{OU}$$

$$\angle UOC = \angle UOA + \angle UOB, \angle UOE = \angle UOC + \angle UOD$$

also:

$$\overline{OE}.\overline{OU}^2 = \overline{OA}.\overline{OB}.\overline{OD}$$

$$\angle UOE = \angle UOA + \angle UOB + \angle UOD$$

woraus die Associativität jenes Productes sofort hervorgeht.

Man setze (Fig. 6)

$$OA.OC = OA',\ OB.OC = OB'$$

$$OA' + OB' = OD',\ OA + OB = OD$$

Dann ist nach 4, 5, 6 in §. 7:

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$$

also $OA'B' \backsim OAB$, woraus $OA'D' \backsim OAD$ folgt und daher

$$\overline{OD'} : \overline{OD} = \overline{OA'} : \overline{OA} = \overline{OC} : \overline{OU}$$

Fig. 6.

ferner

$$\angle D'OD = \angle A'OA = \angle COU$$

oder

$$\angle UOD' = \angle UOC + \angle UOD$$

Hieraus folgt $OD' = OC.OD$ oder zufolge der Bedeutung von OD, OD' das distributive Princip:

$$OA.OC + OB.OC = (OA + OB)\,OC$$

Es treten hier wieder ähnliche Fragen wie am Schlusse des vorigen §. auf: Zur Definition des Quotienten gelangt man durch die Bemerkung, dass jede lytische Verknüpfung zweier Objecte ihre gegenseitige Relation darstellt. So war $OA - OB = BA$ die B und A verbindende Strecke (arithmetisches Verhältniss der Alten) und unter $OA : OB$ wird man (entsprechend dem geometrischen Verhältnisse) ihre Beziehung verstehen, soweit sie durch den geometrischen Charakter des Doppelschenkels AOB bedingt wird Dieser findet

aber seinen Ausdruck in dem Verhältniss der beiden Schenkellängen und dem von ihnen gebildeten Winkel.

Will man den obigen Begriff des Productes zweier Strecken einem allgemeineren subsumiren, so wird man sagen können: Unter dem Producte zweier Objecte versteht man ein neues Object, welches sich zu dem einen Factor verhält, wie der andere Factor zum Modul (der Einheit) der Multiplication; oder: das Product entsteht aus dem einen Factor gerade so, wie dieser aus der Einheit der Operation.

Die actuelle Multiplication erscheint in der Lehre von den einfachen Grössen eigentlich nur als eine wiederholte Addition; als solche kann die hier auseinandergesetzte Productenbildung auf keine Weise angesehen werden. Vielmehr bedarf jener Begriff actueller Multiplication zuvor einer Erweiterung etwa in der soeben gegebenen Weise; diese ist aber keineswegs die einzig mögliche; denn es kann bei dieser Erweiterung der Accent auch darauf gelegt werden, dass ein Product von Objecten (Strecken) der Complex von Objecten (Strecken) sein soll, welche entstehen, wenn der eine Factor von sämmtlichen Elementen (Punkten) des anderen Factors (der anderen Strecke) stetig erzeugt wird. So erhält man, indem man nur die absolute Grösse der Strecken berücksichtigt, das Euklid'sche Product, und, wenn auch deren Richtung gleichzeitig beachtet wird, eine incommutative Multiplication, die wir in §. 36 vortragen werden.

§. 22.

Darstellung der gemeinen complexen Zahlen in einer Ebene.

Wir haben in den letzten §§. ein Operationssystem in Bezug auf Strecken einer Ebene kennen gelernt, welches vollständig diejenigen Eigenschaften aufweist, welche die Zahlen $(A + Bi)$ des §. 19 besassen. Es werden daher letztere als Repräsentanten von Strecken anzusehen sein, welche von dem Punkte O, dem Nullpunkte ausgehen. Die Strecke OU vertritt die Stelle der numerischen Einheit, da eine Multiplication mit derselben nichts an einer Strecke ändert; die Einheit i wird vermöge ihrer Definition

$$+1 : i = i : -1$$

als geometrische mittlere Proportionale zwischen $+1$ und -1 erscheinen und nach (1*) in §. 21 eine Strecke von der absoluten Längeneinheit, senkrecht auf der Strecke OU bedeuten. Es leuchtet ein, dass es an und für sich gänzlich unbestimmt bleiben muss, welche der beiden auf OU senkrechten Geraden man als $+i$ anzunehmen hat.

Ist aber einmal die eine derselben OJ als $+i$ angenommen, so ist die entgegengesetzte die $-i$. Man nennt die Gerade OU die reelle Axe, die OJ die imaginäre Axe und nimmt beide positiv in diesem Sinne (Fig. 7); alle positiven und negativen reellen Zahlen finden auf jener ersten, alle rein imaginären auf der letzteren ihre Darstellung. Eine von O ausgehende Strecke erscheint dann als die Diagonale eines Rechteckes, dessen Seiten A, Bi sind, und in $(A+Bi)$ vereinigt, die der Strecke entsprechende Zahl geben. Jeder Strecke entspricht daher, wie dies zu einer adäquaten Repräsentation eines Zahlensystemes nothwendig ist, nur eine einzige complexe Zahl, und jeder solchen nur eine einzige Strecke.

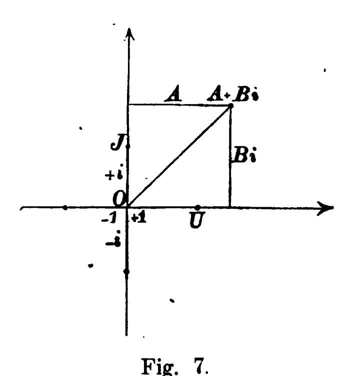


Fig. 7.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass man die complexen Zahlen auch als Repräsentanten der Endpunkte der Strecken ansehen kann, wodurch man dann in jenen eine systematische Nomenclatur für alle Punkte einer nach zwei Dimensionen ausgedehnten Ebene besitzt.

In wiefern diese Beziehung des complexen Zahlengebietes zu einem geometrischen Gebilde als Beweis der Möglichkeit des ersteren angesehen werden kann, ist schon S. 7 auseinandergesetzt worden. Nach unserer Auffassung ist die geometrische Repräsentation ein dem formalen Schema des gemeinen complexen Zahlensystems, zwar dem Begriffe nach nicht unbedingt wesentliches, aber doch vollkommen adäquates Phänomen im Raume, in der Anschauungsform des zusammenfassenden Denkens, welche sich mit psychologischer Nothwendigkeit allen unseren abstracten Vorstellungen als concretes Abbild beigesellt. Das stetige Nebeneinander in seinem widerspruchsvollen oder mindestens unklaren Begriffe bedarf zu seiner Behandlung nothwendig der räumlichen Anschauung, und so hat sich auch der Begründer der Theorie der Functionen complexer Veränderlichen in ihrer abstractesten Form, Riemann, nicht gescheut, von der geometrischen Repräsentation complexer Variabeler nicht nur einen beiläufigen, sondern durchgehenden und wesentlichen Gebrauch zu machen.

Historisches Schon Wallis (Algebra, Opera math Bd. II, 1693. Cap. 66—69) bemerkte bei der algebraischen Lösung von geometrischen Problemen

den merkwürdigen Umstand, dass, während diese unter gewissen Grössenverhältnissen auf reelle Punkte einer Geraden führten, unter anderen Verhältnissen, in welchen sie im eigentlichen Sinne unmöglich waren, an Stelle jener Punkte andere, ausserhalb der Geraden gelegene traten, welche das Problem in einem einigermassen veränderten Sinne lösten, und dass dabei die reellen Grössen auf einer, die imaginären auf einer dagegen senkrechten Geraden dargestellt werden müssten. Die imaginäre Grösse ist ihm „die mittlere Proportionale zwischen einer positiven und negativen Grösse.“ Später wurde etwas ähnliches von Heinrich Kühn (Novi comm. acad. Petropolitanae, Tom III 1753. S. 170) bemerkt; doch hält es schwer, den eigentlichen Inhalt der 53 Seiten langen Abhandlung zu enträthseln. Ein anderer ungenannter Autor (s. Miscell. Taurinensia. 1759. Tom. I, S. 122), sowie „ein bescheidener Gelehrter“ Henri Dominique Truel (s. Cauchy, Exercices d'Analyse et de phys. math. Bd. 4, S. 157) stellte seit dem Jahre 1786 die imaginären Grössen auf einer zu der reellen senkrechten Geraden dar. Einen höheren Standpunkt als seine Vorgänger nimmt auch Buée in seinem Mémoire sur les quantités imaginaires (Phil. Trans. für 1806, S. 23—88) nicht ein.

Der erste, welcher die Darstellung der imaginären Zahlen ($A + Bi$) durch Punkte einer Ebene und die entsprechende geometrische Addition und Multiplication lehrte, war Argand, der sie im Jahre 1806 in einer besonderen Schrift „Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques“ (Paris) aufstellte, die indess erst durch einen Aufsatz von J. F. Français (Gergonne's Annalen, Bd. 4, 1813—14, S. 61) und einen dadurch veranlassten Argand's (a. a. O. S. 133, sowie einen zweiten, Bd. V, S. 197) zur allgemeineren Kenntniss kam. In diesen Aufsätzen ist die ganze Theorie so vollständig abgehandelt, dass später etwas wesentlich Neues nicht hat gesagt werden können, und wenn sich nicht noch eine Abhandlung früheren Datums beibringen lässt, so ist Argand der wahre Begründer der Darstellung des Complexen in der Ebene.

Selbst in Frankreich aber scheint dieselbe trotz ihrer Publication in einem allgemein verbreiteten Journal nicht genügend bekannt geworden zu sein. Denn 1828 trat C. V. Mourey wieder mit derselben hervor (La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, Paris; im Jahre 1861 ist eine zweite Ausgabe daselbst erschienen) und in England John Warren (Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities, Cambridge 1828, sowie in zwei Abhandlungen der Philosophical Transactions für 1829 S. 241 und S. 339).

Bekanntlich hat Gauss 1831 (s. Werke Bd. II, S. 174) dieselbe Idee entwickelt. So gross auch sein Verdienst insofern ist, als sie dadurch zum Gemeingute aller Mathematiker wurde, so kommt ihm doch eine Priorität in keiner Weise zu.

Seitdem ist der Gegenstand vielfach behandelt worden in einer Art und Weise, welche sich von der hier im Texte gegebenen fast überall wesentlich unterscheidet durch den Mangel unseres allgemeinen Principes, wonach,

um die complexen Zahlen durch Punkte einer Ebene repräsentiren zu dürfen, nichts weiter nöthig ist, als die formale Uebereinstimmung der Operationsregeln herzustellen. Aendern sich die Operationsregeln, so muss man die Punkte der Ebene durch andere, diesen Regeln entsprechend gebildete Zahlen bezeichnen.

Es wird genügen, unter den zahllosen Abhandlungen über das Imaginäre diejenigen von den mir bekannten hervorzuheben, welche entweder durch neue Gesichtspunkte oder die Gründlichkeit, mit welcher sie die Frage angegriffen haben, irgendwie ausgezeichnet sind.

Drobisch, Ueber die geom. Construction der imag. Grössen (in den Ber. der Kön. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. II. für 1848. Leipzig. S. 171). Scheffler, Ueber d. Verhältniss d. Arith. zur Geom., in's Bes. über d. geom. Bedeutung d. imag. Zahlen. Braunschweig 1846. Vallès, Études philosophiques sur la science du calcul. Paris 1841 (enthält eine gründliche Behandlung des Begriffes der Zahlen und Grössen, sowie ihrer Operationen); Faure, Essai sur la théorie et l'interprétation des quantités dites imaginaires. Paris 1845 (ein sehr unbedeutendes Werk, das hier nur erwähnt werden musste, weil man sich in Frankreich häufig auf dasselbe beruft); Cauchy, Mémoire sur les quantités géometriques (in den Exercices d'analyse et de phys. math. Bd. IV, 1847); Peacock (III Report of the soc. for the advancement of science. 1833. S. 185).

§. 23.

Anwendung der imaginären Zahlen in der Geometrie.

Besitzt man in den complexen Zahlen ein System von Zeichen für die Punkte einer Ebene, so wird man dasselbe zur Untersuchung von Beziehungen der Punkte einer Ebene zu einander mit demselben Vortheil anwenden können, den die Darstellung der Punkte einer Geraden durch die von einem Anfangspunkte ausgehenden Abscissen in reellen Zahlen gewährt. Nur uneigentlich wird man dies als eine Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie bezeichnen dürfen; denn beide Gebiete fallen hier wesentlich in eines zusammen.

Man wird am einfachsten von der Vorstellung ausgehen, nach welcher jede complexe Zahl einen Punkt A oder die Strecke OA repräsentirt. Dann ist

$$AB = OB - OA$$

die AB verbindende Strecke, welche man entweder als AB oder parallel und gleich derselben als OC (Fig. 8) darstellen könnte. Den speciellen Ort einer Strecke kann man bei dieser Auffassung

durch die complexe Zahl, welche sie repräsentirt, nicht ausdrücken. Sätze wie

$$FG + GH + HF = 0$$

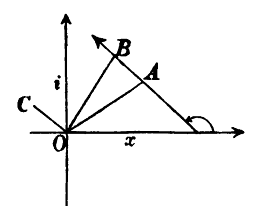


Fig. 8.

stellen sich dann in der Form von Identität dar:

$$(OG - OF) + (OH - OG) + (OF - OH) = 0$$

Es leuchtet ein, dass jede Strecke

$$AB = \overline{AB}\{\cos(x, AB) + i \sin(x, AB)\}$$

gesetzt werden kann, wenn $\overline{AB}$ die absolute Länge, den Modul der Strecke, (x, AB) aber ihren Winkel mit der reellen x Axe, ihre Anomalie bezeichnet. Aus $FG + GH + HF = 0$ erhält man dann durch Zerlegung:

$$\overline{FG}\,{}^{\cos}_{\sin}(x, FG) + \overline{GH}\,{}^{\cos}_{\sin}(x, GH) + \overline{HF}\,{}^{\cos}_{\sin}(x, HF) = 0$$

in welchen Gleichungen die ganze Trigonometrie und Goniometrie einbegriffen ist.

Jede Identität zwischen den die Punkte einer Geraden verbindenden Strecken findet ohne weiteres zwischen den entsprechenden Strecken, welche Punkte in einer Ebene verbinden, statt. So hat man zwischen 4 Punkten die Identität:

$$AB.DC + BC.DA + CA.DB = 0$$

deren Vergleichung mit $GH + HF + FG = 0$ sofort lehrt, dass man stets 3 Punkte FGH finden kann, so dass:

$$GH = AB.DC, \quad HF = BC.DA, \quad FG = CA.DB$$

Dies wird in Worten so ausgedrückt:

Zu jedem Viereck $ABCD$ gibt es ein entsprechendes Dreieck GHF, dessen Seiten:

$$\overline{GH} = \overline{AB}\,.\,\overline{DC}, \quad \overline{HF} = \overline{BC}\,.\,\overline{DA}, \quad \overline{FG} = \overline{CA}\,.\,\overline{DB}$$

und dessen Winkel sich aus

$$\left.\begin{aligned}(x, GH) &= (x, AB) + (x, DC)\\ (x, HF) &= (x, BC) + (x, DA)\\ (x, FG) &= (x, CA) + (x, DB)\end{aligned}\right\}$$

ergeben; nämlich es ist:

$$(x, HF) - (x, GH) = (x, BC) - (x, AB) + (x, DA) - (x, DC)$$

oder

$$(GH, x) + (x, HF) = (AB, x) + (x, BC) + (DC, x) + (x, DA)$$

also $$(GH, HF) = (AB, BC) + (DC, DA)$$

Entsprechend der Bedeutung der Strecken in Bezug auf Längen und Richtung wird man jetzt auch den Begriff des Doppelschnittverhältnisses

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

auf Strecken in einer Ebene erweitern können, und findet den Modulus desselben gleich dem Doppelverhältniss der absoluten Strecken, seine Anomalie der Differenz der Winkel gleich, unter denen die getheilte Strecke AB von den Theilpunkten C und D aus gesehen, erscheint.

Unter vier harmonischen Punkten einer Ebene wird man solche verstehen, deren complexes Doppelverhältniss

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1.$$

Man kann solche geometrisch construiren, indem man von einem Punkte F der Ebene Tangenten FA, FB an einen Kreis und durch F eine Secante legt, welche den Kreis in C, D schneidet.

Die Involution dreier Paare A, A'; B, B'; C, C' von Punkten einer Geraden wird durch

$$\frac{AC'}{C'B} \; \frac{BA'}{A'C} \; \frac{CB'}{B'A} = -1$$

dargestellt; dieselbe Gleichung kann als Definition der involutorischen Lage von Punkten einer Ebene angesehen werden. Es liegen daher die 6 Ecken eines Sechsecks $AC'BA'CB'$ in Involution, wenn das Product der Seiten gerader Ordnung denen ungerader Ordnung gleich und die Summe der Winkel gerader Ordnung denen ungerader Ordnung gleich ist.

Die zahlreichen verschiedenen Formen, in denen die involutorische Beziehung zwischen den Punkten einer Geraden dargestellt werden kann, geben sofort entsprechende Formen für Punkte einer Ebene.

Die Ausführung vorstehender Gedanken verdankt man Möbius (s. Berichte d. Kön. Sächs. Ges. d. Wiss. z. Leipzig. Math.-phys. Cl. 1852, S. 41; 1853, S. 14 und S. 176; 1855, S. 33 und S. 123), auf dessen schöne Abhandlungen, sowie auf die zusammenfassende Darstellung derselben in Witzschel's Grundlin. d. neueren Geom. 1858, hier zu verweisen genügen mag.

Auf die sonstige Verwendung des Imaginären in der analytischen und synthetischen Geometrie, die Theorie der idealen Secanten Poncelet's, die wirkliche Construction der imaginären Durchschnittspunkte zweier Kreise, die Darstellung von Curven, deren variabeler Punkt durch eine von einer reellen Veränderlichen abhängige complexe Function dargestellt wird, sowie die Theorie der geometrischen Verwandtschaft zweier Ebenen und ebenen Figuren und die Abbildung von Ebenen aufeinander, kann erst im zweiten Theile dieses Werkes, in der Theorie der Functionen eingegangen werden.

§. 24.

Die Functionen complexer Zahlen.

Wir haben die complexen Zahlen $(A + Bi)$ bisher ausschliesslich in den Verbindungen betrachtet, welche die 4 Species liefern. Es gibt noch andere Verknüpfungen derselben, welche höhere Rechnungsoperationen verlangen, z. B. solche von der Form

$$(A + Bi)^{\Gamma + \Delta i},$$

welche vollkommen zulässig sind, sobald man nur die Regeln festgesetzt hat, nach welchen mit ihnen zu rechnen ist. Man sieht aber, dass es nothwendig ist, ausdrücklich in jedem Falle nachzuweisen, dass eine Verknüpfung complexer Zahlen wieder auf eine solche führt. Mit anderen Worten: Eine Verknüpfung der vorstehenden Form enthält ein Problem, nämlich diejenige Zahl

$$E + Zi = f(A + Bi, \Gamma + \Delta i)$$

zu finden, welche den Rechnungsregeln genügt, durch die man die im zweiten Gliede der Gleichung stehende Verbindung charakterisirt. Entweder hat ein solches Problem eine Lösung, die explicite angegeben oder deren Existenz wenigstens demonstrirt werden kann, oder aber es hat keine Lösung. Die Unmöglichkeit im letzteren Falle ist jedoch nur eine relative und aus der Beschränkung der Aufgabe hervorgehende; sie kann beseitigt werden durch Einführung neuer complexer Zahlen höherer Ordnung, deren Rechnungs-

regeln eben aus denen der betreffenden Verbindung abgeleitet werden müssen.

Jene Aufgabe, die gewissen gesetzmässigen Verbindungen von Zahlen entsprechenden Complexe zu finden, deren Möglichkeit oder Unmöglichkeit in dem betreffenden Gebiete nachzuweisen, hat die Functionentheorie zu lösen, und ist im 2. Theile dieses Werkes zu behandeln.

Hier bleibt uns nur die Lösung einer Aufgabe der Art übrig, welche die allgemeinste unter denen ist, in welchen die Unbekannte mit den bekannten Zahlen durch eine endliche Anzahl von Additionen und Multiplicationen verbunden ist. Diese fundamentale Aufgabe der Algebra ist die, nachzuweisen, dass die Gleichung

$$fx = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

wo $a_1, \ldots a_n$ (gewöhnliche) complexe Zahlen bezeichnen, jederzeit durch n (gewöhnliche) complexe Werthe von x befriedigt werden kann.

Schon auf S. 71 ist gezeigt, dass eine solche Gleichung jedenfalls nicht mehr als n Wurzeln besitzt; dass sie aber wirklich n Wurzeln hat, wobei wir den Fall der gleichen Wurzeln in bekannter Weise einschliessen, ist seit Mitte des vorigen Jahrhunderts nach sehr verschiedenen Methoden zu beweisen versucht worden. Sie alle aber lassen sich unter drei wesentliche Gesichtspunkte bringen.

§. 25.

Erste Methode zum Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra.

Als die erste Methode bezeichne ich die von Gauss, wonach man den gesammten Umfang derjenigen Werthe untersucht, welche fx annimmt, wenn x alle complexen Werthe durchläuft, und nachweist, dass in jenem auch der Werth $fx = 0$ eingeschlossen ist. Man setze:

$$x = r\ (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$
$$a_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$
$$a_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und
$$fx = u + vi$$

also:

$$u = r^n \cos n\varphi + r^{n-1} r_1 \cos(\overline{n-1}\,\varphi + \varphi_1) + r^{n-2} r_2 \cos(\overline{n-2}\,\varphi + \varphi_2) + \ldots$$
$$v = r^n \sin n\varphi + r^{n-1} r_1 \sin(\overline{n-1}\,\varphi + \varphi_1) + r^{n-2} r_2 \sin(\overline{n-2}\,\varphi + \varphi_2) + \ldots;$$

so kann man zeigen, dass es einen Werth für r von solcher Grösse gibt, dass ausserhalb des durch diesen Modul bestimmten Kreises keinenfalls eine Wurzel der Gleichung $f x = 0$ liegen, also u und v gleichzeitig verschwinden kann.

Es kann nämlich nach einem bekannten Satze r stets so gross gemacht werden, dass das erste Glied in u und v gegen alle anderen unendlich gross ist, sobald nicht sein Factor $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\varphi$ unendlich klein wird. Da aber $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ niemals gleichzeitig verschwinden können, so wird für jedes φ und ein unendlich grosses r immer wenigstens einer dieser Ausdrücke von der $n$ten Ordnung unendlich gross sein. Ist $\cos n\varphi$ nicht $= 0$, so hat u das Zeichen mit $\cos n\varphi$ gemeinschaftlich, ebenso v mit $\sin n\varphi$, wenn dieser Sinus nicht verschwindet.

Für ein unendlich grosses r werden auch die Derivirten:

$$\frac{du}{d\varphi} = -\, n r^n \sin n\varphi - (n-1)\, r^{n-1} r_1 \sin(\overline{n-1}\,\varphi + \varphi_1) - \ldots$$
$$\frac{dv}{d\varphi} = +\, n r^n \cos n\varphi + (n-1)\, r^{n-1} r_1 \cos(\overline{n-1}\,\varphi + \varphi_1) + \ldots$$

von der $n$ten Ordnung unendlich und von demselben Zeichen, als bezüglich $-\sin n\varphi$, $+\cos n\varphi$, wenn diese Functionen nicht verschwinden.

Betrachten wir nun den Verlauf von u und v, wenn φ die Werthe von 0 bis 2π auf einem Kreise mit dem unendlich grossen Radius r durchläuft.

In dem Theile von $-\frac{\pi}{4n}$ bis $+\frac{\pi}{4n}$ ist $\cos n\varphi > \sqrt{\frac{1}{2}}$, also u und $\frac{dv}{d\varphi}$ immer positiv, es wächst also v in demselben fortwährend und da für $\varphi = \pm\frac{\pi}{4n}$, v dasselbe Zeichen als $\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$ hat, so wächst es stetig von einem negativen zu einem positiven Werthe geht also inzwischen einmal durch Null hindurch.

In dem Intervalle von $\frac{\pi}{4n}$ bis $\frac{3\pi}{4n}$ ist $\sin n\varphi > \sqrt{\frac{1}{2}}$, also v stets positiv und $\frac{du}{d\varphi}$ stets negativ; es nimmt also u fortwährend ab von einem positiven Werthe, den es für den Anfangswerth annimmt, bis zu dem negativen für den Endwerth, und geht also einmal, in U_1 durch Null hindurch.

Die Resultate dieser weiter fortgesetzten Untersuchung sind in folgender leicht verständlichen Tabelle verzeichnet:

	Intervall:	u	v
1)	$-\frac{\pi}{4n} \ldots +\frac{\pi}{4n}$	$+$	$-\ +$
2)	$+\frac{\pi}{4n} \ldots \frac{3\pi}{4n}$	$+\ U_1\ -$	$+$
3)	$\frac{3\pi}{4n} \ldots \frac{5\pi}{4n}$	$-$	$+\ -$
4)	$\frac{5\pi}{4n} \ldots \frac{7\pi}{4n}$	$-\ U_2\ +$	$-$
5)	$\frac{7\pi}{4n} \ldots \frac{9\pi}{4n}$	$+$	$-\ +$
6)	$\frac{9\pi}{4n} \ldots \frac{11\pi}{4n}$	$+\ U_3\ -$	$+$
. . .	. . .	. . .	. . .

wo mit $U_1, U_2, \ldots U_{2n}$ diejenigen Punkte bezeichnet sind, in denen u verschwindet.

Da sich u mit x stetig ändert, so bilden die Punkte der Ebenen, in welchen u positiv ist, zusammenhängende Flächenstücke, welche durch ununterbrochene Linien $u=0$ von den Flächenstücken getrennt sind, in denen u einen negativen Werth annimmt. Diese Trennungslinien schneiden den von uns betrachteten Kreis in den $2n$ Punkten U, und verlaufen ausserhalb desselben nothwendig in demselben Winkel $\frac{\pi}{2n}$, in welchem der betreffende Durchschnittspunkt mit dem Kreise liegt. Innerhalb des Kreises aber findet dies im Allgemeinen nicht statt.

In Bezug auf die Gestalt der Flächenstücke innerhalb des Kreises können nun folgende wesentlichen Fälle eintreten:

1) Ein Flächenstück endigt isolirt innerhalb der Kreisfläche, so dass seine Begrenzung aus zwei Stücken, einem Theile der

Kreisperipherie und einer anderen Curve besteht. In Fig. 9 ist eine Gleichung 5ten Grades zu Grunde gelegt, und für diese die Reihe der Curven gezeichnet, in denen $u = 0$ ist. Es sind in diesem Falle die Flächenstücke, deren resp. Begrenzung von U_{10} über X_1 nach U_1; von U_1 über X_1 nach U_2; von U_4 über X_2 nach U_5; von U_6 über X_3 nach U_7; von U_9 über X_1 nach U_{10} geht und zwar sind die, innerhalb deren u positiv ist, durch Schraffirung vor den anderen ausgezeichnet.

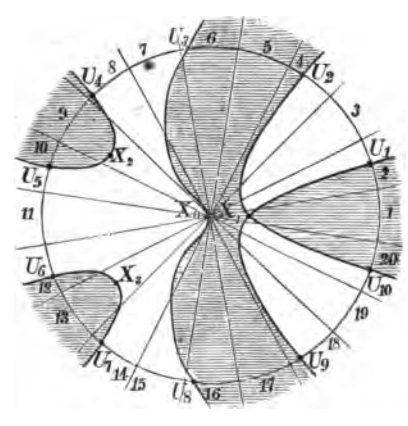


Fig. 9.

2) Das Flächenstück durchsetzt die Fläche dergestalt, dass es mit einem an einer anderen Stelle eintretenden eine zusammenhängende Fläche bildet. Dann besteht seine Begrenzung aus zwei Stücken der Kreisperipherie und zwei dazwischen liegenden Curven. In diesem Falle befindet sich in unserer Figur das Flächenstück $U_2\, U_3\, X_0\, U_8\, U_9\, X_1\, U_2$.

3) Das Flächenstück spaltet sich im inneren Kreisraume einmal oder mehremale dergestalt, dass es mit noch zweien oder mehreren an anderen Stellen eintretenden eine zusammenhängende Fläche bildet, deren ganze Begrenzung dann aus 6, 8 oder mehreren Stücken in gerader Zahl bestehen wird, die abwechselnd der Kreislinie und dem inneren Raume angehören. In unserer Figur ist in diesem Falle das Flächenstück $U_3\, U_4\, X_2\, U_5\, U_6\, X_3\, U_7\, U_8\, X_0\, U_3$.

Dies sind alle Fälle, welche in Bezug auf das Zusammentreffen der von aussen in den inneren Kreisraum eindringenden Flächenstücke statthaben können, und wir können daher hier ganz von etwaigen inselartig in dem Kreisraume vorhandenen Flächenstücken (die es übrigens vermöge der Natur von u nicht geben kann) absehen.

Fassen wir in's Besondere die Flächenstücke, innerhalb deren u positiv ist, in's Auge, so besteht deren Begrenzung, wie obige

Bemerkungen zeigen, jederzeit aus einer geraden Anzahl von Stücken, und es wechseln in ihr Stücke der Kreisperipherie mit Curven ab, welche im inneren Kreisraume liegen. Umlaufen wir die Begrenzung im positiven Sinne, d. h. so, dass die Fläche stets zur Linken liegt, wenn dabei die allgemein gebräuchliche Lage, nach welcher man beim Durchlaufen der positiven reellen Axe in positivem Sinne, die positive imaginäre Axe zur Linken lässt, angenommen wird, so ist nach dem, was über das Zeichen von u in obiger Tabelle enthalten ist, klar, dass die Begrenzung in einem Punkte U mit geradem Index beginnt und zunächst auf der Kreisperipherie nach dem nächsten Punkte mit ungeradem Index geht; die von da ausgehende Begrenzungscurve läuft dann durch die Kreisfläche hindurch zu einem Punkte mit geradem Index. Dann sind wir entweder (1. Fall) wieder zu dem Ausgangspunkte zurückgekehrt und haben das betreffende Flächenstück vollständig umlaufen, oder aber, wir müssen noch weiter zum nächsten Punkte U mit ungeradem Index übergehen, indem wir auf der Kreisperipherie in positivem Sinne fortschreiten. Von diesem aus haben wir wieder durch die innere Kreisfläche zu einem Punkte mit geradem Index zu laufen, der entweder (2. Fall) der Ausgangspunkt ist, oder (3. Fall) von ihm verschieden, wo wir dann in ähnlicher Weise unseren Weg fortzusetzen haben, um schliesslich das ganze Flächenstück mit positivem u zu umlaufen.

Denken wir uns nun alle positiven Flächenstücke in dieser Weise umlaufen, so haben wir dabei jeden der $2n$ Punkte U einmal getroffen und sind jedesmal durch den inneren Kreisraum von einem Punkte mit ungeradem Index zu einem mit geradem Index gelangt, indem wir dabei n Curven durchlaufen haben, welche einen vollständigen Zusammenhang ihrer Theile zeigen (ohne dass sie jedoch im gewöhnlichen Sinne der analytischen Geometrie stetig zu sein brauchen, wie z. B. die von U_9 über X_1 nach U_2 laufende Curve zeigt, welche in X_1 zwei, einen endlichen Winkel mit einander bildende Tangenten hat; die im eminenten Sinne stetige Fortsetzung des Zweiges $U_9 X_1$ der hyperbolischen Curve würde dagegen zu U_1 führen). Während wir diese n Grenzcurven $u = 0$ der Flächenstücke von Punkten U mit ungeradem Index zu solchen mit geradem Index durchlaufen, ändert sich v stetig; da es aber in

jenen Punkten positiv, in letzteren negativ ist, so muss v inzwischen mindestens einmal durch Null hindurchgegangen sein, und es liegt daher auf jeder der n Curven $u = 0$ ein Punkt, in dem zugleich u und v verschwinden, also eine Wurzel unserer Gleichung. In der That sind $X_0\, X_1\, X_2\, X_3$ solche Punkte, welche die Wurzeln einer Gleichung 5ten Grades repräsentiren.

Es ist dabei der Fall nicht ausgeschlossen, dass die Curven in gewissen Punkten (in Fig. 9 in X_1) zusammentreffen, in denen daher Flächenräume mit positivem u aneinanderstossen, ohne aber stetig, d. h. durch einen Flächenstreifen von endlicher Breite zusammenzuhängen. Diese Coincidenzpunkte können nun diejenigen sein, in denen zugleich $v = 0$ ist, also eine Wurzel der Gleichung liegt, welche in diesem Falle zwei oder mehrere gleiche Wurzeln hat.

Um genauer zu untersuchen, wie sich die Verhältnisse in einem beliebigen Punkte x_1 gestalten können, so stelle man fx als Function von $(x - x_1)$ dar; dann hat man im Allgemeinen:

$$fx = k_0 + k_m (x - x_1)^m \{1 + k_{m+1} (x - x_1) + \ldots\}$$

wo $k_0 = f x_1$ und m eine positive ganze Zahl ist. Somit verhält sich in unendlicher Nähe von $x = x_1$, fx wie $k_0 + k_m (x - x_1)^m$ und setzt man:

$$x - x_1 = \varrho (\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$k_0 = \varkappa_0 (\cos \chi_0 + i \sin \chi_0),\ k_m = \varkappa_m (\cos \chi_m + i \sin \chi_m)$$

so ist in unendlicher Nähe dieses Punktes

$$u = \varkappa_0 \cos \chi_0 + \varkappa_m \varrho^m \cos (\chi_m + m \psi)$$

$$v = \varkappa_0 \sin \chi_0 + \varkappa_m \varrho^m \sin (\chi_m + m \psi).$$

Es können nun mehrere Fälle eintreten.

1) Es kann $\varkappa_0 \cos \chi_0 = 0$ sein, dann ist:

$$u = \varkappa_m \varrho^m \cos (\chi_m + m \psi)$$

Lassen wir nun ψ einen vollkommenen Umlauf machen, d. h. x in einem unendlich kleinen Kreise um $x = x_1$ herumgehen, so wird u, $2m$ mal verschwinden, also $2m$ mal von positiven Werthen zu negativen und umgekehrt übergehen; es treffen sich daher in $x = x_1$, $2m$ Linienelemente, in welchen $u = 0$ ist. Fasst man dieselben paarweise zusammen, und zwar nicht die nach entgegengesetzten Seiten gerichteten (wie dies der stetigen Fortsetzung im gewöhn-

lichen geometrischen Sinne entspricht), sondern je zwei benachbarte, innerhalb deren u positiv ist, so erhält man m sich in x_1 treffende und gebrochene Linienzüge, welche die Begrenzungen von m Flächenräumen mit positivem u sind. Verschwindet also der reelle Theil von $f x_1$, so stossen in x_1 m Flächenräume mit positivem u aneinander, wo m eine Zahl zwischen 1 und n ist; und umgekehrt, wenn in einem Punkte x_1, m solche Flächenräume zusammenstossen, so muss in seiner Nähe

$$u = \varkappa_m \varrho^m \cos(x_m + m\psi)$$

sein, also der reelle Theil von $f x_1$ verschwinden. Es ist aber keineswegs nothwendig, dass in diesem Punkte auch der imaginäre Theil von $f x_1$ verschwindet, und also in einem solchen Punkte, in dem mehrere Flächenstücke mit positivem u zusammenstossen, eine Wurzel der Gleichung $f x = 0$ liegt.

2) Ist aber x_1 eine Wurzel von $f x = 0$, also $\varkappa_0 = 0$, und stossen in x_1, m solche Flächenstücke mit positivem u aneinander, so muss in der Nähe von x_1

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \varkappa_m \varrho^m \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\chi_m + m\psi)$$

sein, also $f x$ als niedrigstes Glied die Potenz $(x - x_1)^m$ enthalten, in welchem Falle man sagt, dass die Gleichung $f x$ die Wurzel $x = x_1$, m fach besitze.

Das Resultat vorstehender Betrachtungen ist nun zusammenfassend dieses: Den inneren Kreisraum unseres unendlich grossen Kreises durchlaufen n verschiedene zusammenhängende Linien, in denen u überall verschwindet. Auf jeder dieser Linien muss v wenigstens einmal verschwinden, also eine Wurzel der Gleichung $f x = 0$ liegen; liegt eine Wurzel gerade in dem Punkte, in welchem sich m solche Linien treffen (wie z. B. in X_1 unserer Figur), so ist dieselbe m fach Wurzel der Gleichung. Die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades ist daher jedenfalls nicht kleiner als n, und da andererseits eine ganze Function $n$ten Grades nicht mehr als n lineare Factoren ihrer Natur nach haben kann (s. S. 71), so sieht man:

Jede algebraische Gleichung hat jederzeit so viele gemeine complexe Wurzeln, als ihr Grad Einheiten.

Der vorstehende Beweis ist derselbe, den Gauss nebst einer genauen und schlagenden Kritik der früheren Versuche, diesen Satz zu erweisen, in seiner Doctordissertation: „Dem. nova, omnem funct. algebr. rat. integr. unius variab. in fact. reales primi vel sec. grad. resolvi posse" (Helmstädt 1799) gegeben und in den zur 50jährigen Jubelfeier seines Doctorates abgefassten „Beiträgen zur Theor. d. algeb. Gl." (Göttinger Abhandl. IV. Band von 1848 bis 1850) mit der unwesentlichen Aenderung reproducirt hat, dass er nicht, wie dort die Systeme der Curven $u = 0$, $v = 0$ nebeneinander, sondern in der oben ausgeführten Weise nur eines derselben betrachtet. Doch hat der Beweis im Vorstehenden dadurch an Kürze gewonnen, dass ich sowohl, als es sich um die Untersuchung des Verhaltens von fx für $x = \infty$, sowie, um das im Punkte x_1 handelte, den Begriff des Unendlichen unverhüllt zugelassen habe. Indess ist es interessant, die Grenzen kennen zu lernen, ausserhalb oder innerhalb welcher die Verhältnisse so sind, wie sie für unendlich grosse oder unendlich kleine Kreise vorstehends angegeben sind:

Was erstens den unendlich grossen Kreis betrifft, so verhalten sich u und v so, wie es früher angegeben wurde, ausserhalb des Kreises, dessen Radius die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$r^n - \sqrt{2}\,(r_1\, r^{n-1} + r_2\, r^{n-2} + \ldots) = 0$$

darstellt.

Die Verhältnisse aber, wie sie für einen $x = x_1$ unendlich nahe umgebenden Kreis geschildert sind, finden ihrem Wesen nach statt innerhalb eines Kreises, dessen Radius ϱ die einzige positive Wurzel der Gleichung:

$$0 = m\sqrt{\frac{1}{2}} - (m+1)\, x_{m+1}\, \varrho - (m+2)\, x_{m+2}\, \varrho^2 - (m+3)\, x_{m+3}\, \varrho^3 - \ldots$$

Was die von anderen gegebenen Beweise betrifft, so mag hier ein kurzer Bericht über diejenigen unter ihnen folgen, welche auf demselben Fundamentalprincipe beruhen.

Ein 1815 von Argand (Gergonne's Ann. Bd. V. S. 204) gegebener Beweis ist später von Cauchy, Sturm u. a. bearbeitet, aber niemals auf den ersten Erfinder zurückgeführt worden. Es ist interessant, dass die neuesten Darstellungen, die sich vor der Cauchy's durch Kürze und Prägnanz auszeichnen (s. Baltzer's Elem. d. Math. I. Bd. S. 277 der 2. Auflage), genau mit der Argand's übereinstimmen.

Das Princip dieses Beweises ist folgendes: Man construire die Norm $(u^2 + v^2)$ als Ordinate einer Fläche zu dem Punkte $(x + yi)$ der Ebene, in welcher man die complexen Grössen darstellt. Diese Fläche wird jedenfalls nur auf der positiven Seite der (x, y) Ebene liegen, und es kann gezeigt werden, dass die Ordinate der Fläche kein Minimum hat, welches nicht in die (x, y) Ebene fiele.

Scheibner pflegt den Satz in seinen Vorlesungen in folgender interessanten Form zu beweisen: Man stelle $(u + vi)$ als Punkt in einer Ebene dar; für alle $(x + yi)$ wird dann $(u + vi)$ entweder die ganze Ebene durchlaufen, oder es sind einzelne Inseln vorhanden, welche $(u + vi)$ niemals ausfüllen kann.

Dann aber müssen die Punkte an deren Begrenzungen die Eigenschaft haben, dass durch unendlich kleine Aenderungen in den zugehörigen Werthen $(x + yi)$, in welchem Sinne sie auch geschehen mögen, gewisse Aenderungen von $(u + vi)$, welche in jene Inseln hineinführen würden, niemals erzeugt werden können. Es wird gezeigt, dass einem, $(x + yi)$ unendlich nahe, allseitig umgebenden Flächenstücke stets ein, $(u + vi)$ allseitig einschliessendes unendlich kleines Flächenstück entspricht. Es existiren somit keine solche Inseln, $(u + vi)$ nimmt jeden complexen Werth mindestens einmal an.

Im Wesentlichen gehören zu der hier behandelten Klasse von Beweisen auch der dritte von Gauss (Comment. rec. soc. Gottingensis a. 1816. „Theorematis de resol. funct. algebr. dem. tertia"). der von Mourey (La vraie théorie d. quant. nég. et. imag. S. 76 der 2. Auflage, und Liouville's Journ. Bd. IV S. 501, Bd. V. S. 31), der von Sturm (Liouville's Journ. Bd. I. 1836. S. 278), und der von Ullherr (Crelle's Journ. Bd. 31. 1846. S. 231), die wir theilweise im II. Theile dieses Werkes im Verein mit einem von Riemann gegebenen Beweise, der sich der Integrale complexer Functionen bedient, behandeln werden.

§. 26.

Zweite Methode zum Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra.

Der natürlichste und directeste Weg, den Satz, dass jede Gleichung n complexe Wurzeln hat, zu beweisen, ist offenbar, die Wurzeln sogleich direct zu berechnen und explicite darzustellen. Doch sind alle Auflösungsmethoden algebraischer oder numerischer Gleichungen sehr zusammengesetzte Processe, welche mehr oder minder schon den Beweis jenes Satzes impliciren; so dass sie, soviel mir bekannt, noch nicht in gelungener Weise zur Begründung des fundamentalen Principes der Algebra verwendet worden sind.

Euler (Hist. de l'Acad. d. Berlin. A. 1749. S. 263) will den Satz erweisen, indem er die Wurzeln als durch algebraische Irrationalitäten darstellbar annimmt, und es hat dann keine Schwierigkeit, mit Hilfe der Auflösung der Gleichungen $x^n = a$, deren Charakter als imaginäre Grössen nachzuweisen. Seitdem man aber darauf verzichtete, eine algebraische Gleichung allgemein algebraisch auflösen zu können, konnte man zur explicirten Darstellung der Wurzel nur unendliche Reihenentwickelungen oder Approximationsmethoden verwenden. Ein auf solche gegründeter Beweis — der erste Versuch einer Demonstration des Lehrsatzes — von d'Alembert (Hist. de l'Acad. de Berlin. A. 1746. S. 182) unterliegt mehreren wesentlichen Bedenken (vergl. Gauss, Demonstr. 1799. Art. 5 und 6), die Lagrange (IX. Note zu dem Traité de la résol. des équ. num. Paris 1808) theilweise beseitigt hat. Dass indessen der

Beweis an einem Hauptgebrechen leidet, wird sogleich einleuchten, wenn wir ihn hier in seinem Principe, wenn auch in bedeutend verkürzter Form darstellen:

Man construire die Curve

$$y = f(x)$$

wo $f(x)$ eine ganze rationale Function mit reellen Coefficienten ist, so wird deren Verhalten in einem Punkte x_0, y_0 am einfachsten übersehen, wenn man $y - y_0$ als Function von $(x - x_0)$ darstellt:

$$y - y_0 = b'(x - x_0) + b''(x - x_0)^2 + \dots$$

Ist $b' \lesseqgtr 0$, so verhält sich die Curve an dieser Stelle wie eine Gerade; ist $b' = 0$, aber $b'' \lesseqgtr 0$ wie eine Apollonische Parabel, deren Axe der y Axe parallel ist, u. s. f.

Gibt es keinen reellen Werth x, für den $y = 0$ ist, so sei x_0 ein Werth, dem ein positives $y = y_0$ entspricht, welches unter seinen benachbarten ein Minimum ist, in dem also $b' = 0$, $b'' > 0$,

$$y - y_0 = b''(x - x_0)^2 + b'''(x - x_0)^3 + \dots$$

Es fragt sich nun, ob aus dieser Gleichung für ein $y < y_0$ ein entsprechendes x bestimmt werden könne. Nimmt man das y von y_0 wenig verschieden an, so wird der Gleichung durch den Werth:

$$x = x_0 + i\sqrt{\frac{(y_0 - y)}{b''}}$$

also durch complexe Werthe nahezu genügt, und es gehen also an dieser Stelle zwei reelle Wurzeln der Gleichung in zwei complexe über. Mit diesem angenäherten Werthe der Wurzel geht man nun wieder in die Gleichung ein, verbessert ihren Werth u. s. w. nach dem gewöhnlichen Princip der approximativen Berechnung. Hat man sich so überzeugt, dass zu Werthen von y welche dem y_0 sehr nahe kommen, complexe Wurzeln von der betrachteten Form gehören, so ist es dann nicht schwer, auch zu zeigen, dass dem Werthe $y = 0$ complexe Wurzeln der Gleichung in x entsprechen.

Soll aber diese Schlussweise zulässig sein, so muss jener Approximationsprocess zu einer Grenze führen, also die Reihe, in welche man $(x - x_0)$ entwickelt, convergent und ferner in analytischer Form darstellbar sein, damit man sich durch ihre wenigstens indirecte Substitution in die Gleichung

$$y - y_0 = b''(x - x_0)^2 + \dots$$

davon überzeugen könne, dass sie eine Wurzel derselben ist

Dazu aber würde es eines Satzes, wie des von Lagrange zur analytischen Entwickelung der kleinsten Wurzeln einer Gleichung und dessen ohne Hilfe der ausgeführten Theorie der Functionen complexer Grössen wohl nicht möglichen strengen Beweises bedürfen: so dass man das Uebel des Lagrange'schen Beweises als unheilbar ansehen muss.

Auch das von Legendre (Théor. d. nombr. 3. éd. 1830. Bd. I. S. 176) gegebene Verfahren, die complexen Wurzeln approximativ zu bestimmen, leidet an demselben Gebrechen.

§. 27.

Dritte Methode.

Während die erste Methode, den Satz von der Zerlegbarkeit einer ganzen Function in Factoren ersten Grades zu beweisen, wesentlich von Stetigkeitsbetrachtungen, die zweite von einem Näherungsverfahren zur Bestimmung der Wurzel ausging, so lässt sich eine dritte Methode erdenken, welche rein algebraischer Natur ist und auf den Sätzen über Zerlegung der Functionen in rationale Factoren beruht. Den einzigen mir bekannten, strengen Beweis dieser Art hat Gauss gegeben. Er zeigt, dass wenn fx eine ganze Function mit reellen Coefficienten vom Grade $2^{\mu} k$ und k impar ist, stets eine andere Function mit reellen Coefficienten vom Grade $2^{\mu'} k$, wo $\mu' < \mu$, angegeben werden kann von der Eigenschaft, dass alle complexen Wurzeln der letzteren, wenn sie solche hat, auf einen reellen oder complexen Werth führen, welcher fx verschwinden macht. Ist $\mu' > 0$, so wendet man dasselbe Verfahren auf die Function vom Grade $2^{\mu'} k$ an u. s. f., bis man endlich zu einer Function von imparem Grade k und mit reellen Coefficienten gelangt, der jedenfalls eine reelle Wurzel zukommt, die daher aufsteigend zu einer reellen oder complexen Wurzel der Gleichung $fx = 0$ führt.

S. Dem. nova altera (Comment. rec. soc. Gotting. A. 1816) und v. Staudt in Crelle's Journ. Bd. 29. S. 97. Auf einem ganz ähnlichen Principe als der soeben angedeutete Beweis, der bei seinem rein algebraischen Charakter für die uns zunächst liegenden Zwecke nicht weiter ausgeführt werden soll, beruht ein von Euler (Hist. de l'Acad. d. Berlin. A. 1749. S. 222) gegebener, der dann von de Foncenex (Miscell. phil.-math. soc. Taurinensis. Bd. I. 1759. S. 116), Laplace (Leçons de l'École normale 1795. im Journ. de l'écol. polytechnique. Cah. 7. 8. S. 56), Lagrange (Nouv. Mém. de l'Acad. d. Berlin. 1772. S. 222 und IV. Note des Traité de la Résol. des équ. numér.), Ivory (Art. Equations in der Edinburgher Encyclopaedia britannica, 7. Ausg. 1842. S. 329) und von G. Peacock (Report of the 3. meet. of the Brit. Assoc. f. the advanc. of science. S. 297) berichtigt und umgestaltet worden ist. Indessen theilen alle diese Beweise einen fundamentalen Fehler — dem zu entgehen, einen eminenten Aufwand von Schärfe des Gedankens und Productionskraft, wie beides in Gauss wunderbar vereinigt war, voraussetzte — den Fehler nämlich, dass von vornherein nicht nach der Existenz der Wurzeln einer Gleichung, sondern nur nach der Form derselben, und ob diese $(A + Bi)$ sei,

gefragt wird, indem dabei stillschweigend das Axiom angenommen wird, dass eine Gleichung jedenfalls n Wurzeln besitze, die entweder reell oder imaginär oder unmöglich d. h. nicht von der Form $(A + Bi)$ seien. Diese Annahme ist doch nicht so absurd, als es auf den ersten Blick dem heutigen Mathematiker scheinen möchte. Beweis genug die Unbefangenheit und Allgemeinheit, mit welcher sie gemacht und noch im Jahre 1808 von LAGRANGE, ja noch 1834 von PEACOCK, der GAUSS Beweise sehr wohl kannte, festgehalten wurde. Man muss sich nur die Sache so vorstellen: Ausser den gewöhnlichen imaginären Zahlen von der Form $(A + Bi)$ kann man vorläufig noch andere annehmen, auf welche der Begriff der Addition und der commutativen Multiplication eindeutig anwendbar ist, und welche als Wurzeln, freilich als unmögliche, erscheinen können. Wir werden in der That im VI. Abschnitt noch weitere complexe Zahlen, welche von den bisher betrachteten specifisch verschieden sind, kennen lernen, auf welche die Addition und Multiplication eindeutig anwendbar ist und welche recht wohl solchen Gleichungen neben den gemeinen complexen Zahlen noch als Wurzeln genügen können. Die Paradoxie, welche darin liegt, nach der Form der Wurzeln zu fragen, ist also nur scheinbar und nur bei einer beschränkten Auffassung vorhanden. Wie man aber von vornherein behaupten könne, dass jede Gleichung in diesem Sinne „unmögliche" Wurzeln überhaupt, und zwar deren n besitzen müsse, dafür finde ich bei den angeführten Schriftstellern auch nicht den Schatten eines Rechtfertigungsgrundes. —

KÄSTNER nimmt (Anfangsgr. d. endl. Analysis 1767. Art. 210) diesen Satz ganz ausdrücklich als Axiom an, ein Verfahren, welches immer noch bedeutend besser ist, als wenn, wie dies bei vielen, in'sbesondere deutschen Lehrbüchern der Algebra bis auf unsere Tage der Fall ist, nicht einmal ein Enoncé dieses Fundamentalsatzes gegeben, oder derselbe auf wunderliche Weise (s. z. B. EGEN, Handb. d. Arith. II. Bd. S. 244) hinein escamotirt wird. Ein höchst naiver Syllogismus findet sich in manchen Büchern aus dem Ende des vor. Jahrhunderts: „Man nehme n Factoren $(x - x_1) \ldots (x - x_n)$ an, wo $x_1 \ldots x_n$ noch unbekannt sind und setze deren Product $= fx$. Dann werden aus der Vergleichung beider Ausdrücke Gleichungen erhalten, aus welchen die Wurzeln $x_1 \ldots x_n$, da die Zahl der Gleichungen und Wurzeln gleich ist, sämmtlich bestimmt werden können." (GAUSS Dissert. von 1799. Art. 3.) Einen prächtigen circulus vitiosus begeht DUBOURGUET in einem Beweise (GERGONNE's Ann. 2. Bd. 1811. S. 399), den er trotz wiederholter Erinnerungen (s. 3. und 4. Bd. derselben Annal.) nicht zurückgenommen hat.

SECHSTER ABSCHNITT.

Die höheren complexen Zahlen.

§. 28.

Theorie der complexen Zahlen im Allgemeinen.

Wir gehen bei der Bildung der höheren complexen Zahlen von einer Anzahl von einander unabhängiger, ursprünglicher, imaginärer Einheiten $\iota_1, \iota_2 \ldots \iota_n$ aus, welche additiv und multiplicativ sowohl unter sich, als auch mit den gewöhnlichen complexen Zahlen verbunden werden können. Unter $a_k \iota_k$, wo a_k eine gemeine complexe Zahl bedeutet, verstehen wir ein commutatives Product; wir setzen ferner das associative Princip voraus, wenn es sich um die Multiplication der neuen Einheiten unter einander oder mit gemeinen complexen Zahlen handelt, lassen aber die Voraussetzung der Commutativität der Einheiten unter einander im Allgemeinen fallen.

Bilden wir aus solchen Producten $a_k \iota_k$ durch Addition, d. h. eine commutative und associative Operation die Zahl

$$\alpha = a_1 \iota_1 + \ldots + a_n \iota_n$$

so nennen wir α eine complexe Zahl $n$ter Ordnung und ersten Grades, mit den Einheiten $\iota_1 \ldots \iota_n$ und den Coefficienten $a_1 \ldots a_n$. Wir werden solche complexe Zahlen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, mit griechischen, die gemeinen complexen Zahlen mit lateinischen Buchstaben bezeichnen.

Die Voraussetzung, dass $\iota_1 \ldots \iota_n$ von einander unabhängig sein sollen, kann jetzt genauer dahin präcisirt werden, dass zwischen den n imaginären Einheiten keine lineare Gleichung

$$0 = a_1 \iota_1 + \ldots + a_n \iota_n$$

bestehen soll, ausser wenn $a_1 = 0, \ldots a_n = 0$.

Bei der Addition zweier solchen Zahlen wird man zufolge der Grundgesetze dieser Operation

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1 \iota_1 + \ldots + a_n \iota_n) + (b_1 \iota_1 + \ldots + b_n \iota_n)\\ &= a_1 \iota_1 + \ldots + a_n \iota_n + b_1 \iota_1 + \ldots + b_n \iota_n\\ &= (a_1 \iota_1 + b_1 \iota_1) + \ldots + (a_n \iota_n + b_n \iota_n)\end{aligned}$$

setzen müssen, und wenn man:

$$(a + b)\,\iota = a\,\iota + b\,\iota$$

also das distributive Princip in diesem Falle annimmt, so hat man:

$$(a_1 \iota_1 + \ldots + a_n \iota_n) + (b_1 \iota_1 + \ldots + b_n \iota_n) = (a_1 + b_1)\,\iota_1 + \ldots + (a_n + b_n)\,\iota_n,$$

eine Gleichung, welche man auch als Definition des Additionsbegriffes ansehen mag. Dann folgt aus ihr ohne weiteres

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

und

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= \{(a_1 + b_1)\,\iota_1 + \ldots\} + (c_1 \iota_1 + \ldots)\\ &= (\overline{a_1 + b_1} + c_1)\,\iota_1 + \ldots = (a_1 + \overline{b_1 + c_1})\,\iota_1 + \ldots\\ &= (a_1 \iota_1 + \ldots) + \{(b_1 + c_1)\,\iota_1 + \ldots\} = \alpha + (\beta + \gamma)\end{aligned}$$

also das commutative und associative Princip im Allgemeinen.

Es wird nicht überflüssig sein, hier den methodischen Weg zu bezeichnen, der uns zu den Rechnungsoperationen für diese Zahlen führt: Zunächst benutzt man das Princip der Permanenz der formalen arithmetischen Gesetze, indem man die in §. 6 und 7 gelehrten Operationen mit allen ihren Folgerungen auf die complexen Zahlen anwendet und so zu den Formeln gelangt, welche die Resultate jener Operationen darstellen. Dann aber, weil es a priori nicht feststeht, dass alle jene Gesetze der Addition und Multiplication widerspruchsfrei für die neuen Zahlen gelten, geht man synthetisch von jenen auf analytischem Wege gewonnenen Formeln aus und weist nach, dass die durch sie definirte Operation den formalen Gesetzen derselben genügt. Erst wenn diese beiden Wege zurückgelegt sind, liegt die Möglichkeit, aber auch die Nothwendigkeit vor, die Operationen mit den allgemein in § 6 und 7 definirten zu identificiren.

Was man unter der Subtraction zweier complexen Zahlen zu verstehen habe, geht aus dem Additionsbegriffe unzweifelhaft hervor, wie auch, dass beide Operationen stets eindeutig sind.

Man sieht ferner, dass wenn

$$a_1 \iota_1 + \ldots + a_n \iota_n = b_1 \iota_1 + \ldots + b_n \iota_n$$

also

$$(a_1 - b_1) \iota_1 + \ldots + (a_n - b_n) \iota_n = 0,$$

nach der obigen Festsetzung der linearen Independenz der n Einheiten, hieraus auf die Gleichheit der respectiven Coefficienten geschlossen werden kann.

Sämmtliche Zahlen α, welche in linearer Weise aus n unabhängigen Einheiten gebildet werden können, bilden zusammen ein System $n$ter Ordnung und ersten Grades.

Untersuchen wir jetzt die Zahlen, welche aus n linearunabhängigen Zahlen dieses Systems $\beta_1, \ldots \beta_n$, zwischen denen also keine Gleichung

$$c_1 \beta_1 + \ldots + c_n \beta_n = 0$$

stattfindet, gebildet werden können. Ist

$$\alpha_1 = a_1 \beta_1 + \ldots + a_n \beta_n$$

und a_1 nicht Null, so hat man:

$$\beta_1 = + \frac{1}{a_1} \alpha_1 - \frac{a_2}{a_1} \beta_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} \beta_n$$

Es kann also β_1 aus $\alpha_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ linear gebildet werden und daher das aus $\beta_1 \ldots \beta_n$ abgeleitete System ebenso aus $\alpha_1, \beta_1 \ldots \beta_n$ abgeleitet werden. Man sieht überhaupt, dass wenn $\beta_1 \ldots \beta_n$ linearunabhängig sind, und ebenso $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, das ganze System der aus $\beta_1 \ldots \beta_n$ dem aus $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ abgeleiteten identisch wird.

Unter dem Producte $\alpha \beta$ verstehen wir, wenn

$$\alpha = a_1 \iota_1 + \ldots + a_n \iota_n = \sum a_m \iota_m$$

$$\beta = b_1 \iota_1 + \ldots + b_n \iota_n = \sum b_p \iota_p$$

gesetzt wird:

$$\alpha \beta = \sum a_m \iota_m \sum b_p \iota_p = \sum a_m b_p \iota_m \iota_p$$

indem nach den oben festgesetzten Annahmen $a_m \iota_m b_p \iota_p = a_m b_p \iota_m \iota_p$ wird. Nimmt man dann dieselbe Multiplicationsregel für die aus $\iota_m \iota_p$ zusammengesetzten Zahlen, und das associative Princip bei der Multiplication der Einheiten $(\iota_m \iota_p) \iota_q = \iota_m (\iota_p \iota_q)$ an, so hat man:

$$(\sum a_m \iota_m \sum b_p \iota_p) \sum c_q \iota_q = (\sum a_m b_p \iota_m \iota_p) \sum c_q \iota_q$$
$$= \sum a_m b_p c_q (\iota_m \iota_p) \iota_q = \sum a_m b_p c_q \iota_m (\iota_p \iota_p)$$
$$= \sum a_m \iota_m \sum b_p c_q \iota_p \iota_q = \sum a_m \iota_m (\sum b_p \iota_p \sum c_q \iota_q)$$

also

$$(\alpha \beta) \gamma = \alpha (\beta \gamma)$$

d. h. das associative Princip in seiner vollen Gültigkeit. Was das allgemeine distributive Princip betrifft, so ist

$$(\sum a_m \iota_m + \sum b_m \iota_m) \sum c_p \iota_p = \sum (a_m + b_m) \iota_m \,.\, \sum c_p \iota_p$$
$$= \sum (a_m + b_m) c_p \,.\, \iota_m \iota_p = \sum a_m c_p \iota_m \iota_p + \sum b_m c_p \iota_m \iota_p$$
$$= \sum a_m \iota_m \,.\, \sum c_p \iota_p + \sum b_m \iota_m \,.\, \sum c_p \iota_p$$

und dasselbe daher erfüllt. Die Eindeutigkeit der Multiplication folgt ebenfalls aus ihrer Definition, falls die Producte $\iota_m \iota_p$ bestimmte sind; ob aber das Product sich stets ändert, wenn sich einer der Factoren ändert, und ob die Multiplication commutativ ist, oder nicht, beides hängt ganz von der Bedeutung ab, welche man den Producten der Einheiten gibt, und welche offenbar eine ganz verschiedene sein kann, ohne dass sich die Gültigkeit der bisher entwickelten Multiplicationsregeln dadurch änderte.

Wir haben bisher nur die Zahlen ersten Grades betrachtet, welche linear aus ihren Einheiten zusammengesetzt sind. Man wird Zahlen zweiten Grades erhalten, wenn sich in:

$$\alpha = a_1 \varkappa_1 + a_2 \varkappa_2 + \dots$$

unter den $\varkappa_1, \varkappa_2 \dots$ solche Producte von Einheiten $\iota_m \iota_p$ befinden, welche von den Einheiten selbst wesentlich verschieden sind. Ebenso kann man Zahlen $m$ten Grades aus den Producten der Einheiten zu je m zusammensetzen. Ihre Rechnungsregeln definiren wir, wie dies auch schon vorhin vorausgesetzt ist, formal ganz ebenso, als die der Zahlen ersten Grades — und erhalten so ein aus den ursprünglichen und den abgeleiteten Einheiten gebildetes vollständiges Zahlensystem $n$ter Ordnung, dessen Multiplication eine associative und distributive Operation ist.

In der Verschiedenheit der particulären Bestimmung der Einheitsproducte liegt die Verschiedenheit der Systeme höherer complexer Zahlen. So könnte man, um die Gesetze der arithmetischen Multiplication, soweit als möglich,

permanent zu machen, z. B. die Commutativität erhalten und deshalb $\iota_m \iota_p = \iota_p \iota_m$ setzen, wo dann noch die Werthe dieser Producte selbst mannigfach gewählt werden können. Man könnte ferner, indem man jene Permanenz aufgibt, $\iota_m \iota_p = - \iota_p \iota_m$ setzen. Es wird ferner nahe liegen, die Producte der Einheiten auf die Einheiten selbst zu reduciren und z. B. $\iota_1 \iota_2 = \iota_3, \ldots$ zu setzen, um so nicht bei jeder neuen Multiplication auf neue Zahlen geführt zu werden. Endlich wird man die Absicht verfolgen können, solche Bestimmungen zu treffen, welche die Eigenschaft eines Productes, sich mit einem seiner Factoren zu ändern, erhalten, um so eine bestimmte Division möglich zu machen, u. s. w. Die wissenschaftlich wichtigsten, speciellen Annahmen werden wir im Folgenden einzeln untersuchen.

Die idealen Zahlen. Die von Gauss und Dirichlet in die Zahlenlehre eingeführten allgemeinen complexen ganzen Zahlen

$$\alpha = \mathfrak{a}_1 \iota_1 + \ldots + \mathfrak{a}_n \iota_n$$

wo $\iota_1 \ldots \iota_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n = 1$$

und $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ ganze reelle Zahlen sind, unterscheiden sich von den Complexen der Analysis dadurch, dass hier zwischen den n Einheiten allerdings lineare Relationen bestehen, nur (mit Einer Ausnahme) keine ganzzahligen.

Eine solche complexe Zahl kann entweder in Factoren derselben Art zerlegt werden, oder nicht. Im ersten Falle wird man sie eine zusammengesetzte Zahl, im anderen eine complexe Primzahl nennen können. Es hat nun Kummer (Crelle's Journ. Bd. 35. S. 319) bemerkt, dass wenn auch α auf keine Weise in complexe Factoren zerlegt werden kann, sie deshalb noch nicht die wahre Natur einer Primzahl hat, weil sie schon gewöhnlich der ersten und wichtigsten Eigenschaft der Primzahlen ermangelt: nämlich dass das Product zweier Primzahlen durch keine von ihnen verschiedene Primzahl theilbar ist. Es haben vielmehr solche Zahlen, wenn gleich sie nicht in complexe Factoren zerlegbar sind, dennoch die Natur der zusammengesetzten Zahlen, und Kummer denkt sie sich daher in ideale complexe Prim-Factoren zerlegt, die er durch eine unter allen Umständen bleibende Eigenschaft der Primfactoren complexer Zahlen, welche unabhängig ist von der Zufälligkeit, ob die wirkliche Zerlegung statthabe oder nicht, vollkommen definirt hat.

Auch Galois (s. Serret, Algèbre sup. 2. éd. S. 348) hat neue complexe Zahlen aufgestellt, welche ganz in unserer obigen Form erscheinen, und gemäss dem Principe der Permanenz, das in der Algebra zur Einführung der gewöhnlichen complexen Zahlen veranlasst hat, und welches einer Gleichung soviel Wurzeln beilegt, als ihr Grad Einheiten hat, den entsprechenden Satz auf die Congruenzen höherer Grade übertragen.

Jedoch kann es hier nicht unsere Absicht sein, die Theorie dieser und der idealen Zahlen weiter zu verfolgen: die Natur des Imaginären in der Lehre von den ganzen Zahlen ist denn doch bei der Unstetigkeit des Zahlenmaterials eine andere, als die des Imaginären in der Analysis mit ihrem Begriffe des

Stetigen. Während die im Texte oben definirten, stetig aufeinanderfolgenden Zahlen mannigfache, ihnen entsprechende Objecte im Gebiete der wirklichen Anschauung des Stetigen, im Raume, der Zeit, der mechanischen Kraft und Geschwindigkeit finden, so scheinen, wie Kummer dies zuerst ausgesprochen hat, die complexen und idealen ganzen Zahlen berufen, in den chemischen Verbindungen, welche stets nach ganzzahligen Verhältnissen erfolgen, ihr natürliches Substrat zu finden. Eine chemische Formel kann als eine complexe Zahl angesehen werden, deren Einheiten die Zeichen der Elemente und deren Coefficienten die Multipla derselben sind. „Der chemischen Verbindung entspricht für die complexen Zahlen die Multiplication; den Elementen oder eigentlich den Atomgewichten derselben, entsprechen die Primfactoren; und die chemischen Formeln für die Zerlegung der Körper sind genau dieselben, wie die Formeln für die Zerlegung der Zahlen. Auch selbst die idealen Zahlen unserer Theorie finden sich in der Chemie, vielleicht nur allzuoft, als hypothetische Radicale, welche bisher noch nicht dargestellt worden sind, die aber, sowie die idealen Zahlen, in den Zusammensetzungen ihre Wirklichkeit haben. Das Fluor, für sich bisher nicht darstellbar und noch den Elementen zugezählt, kann als Analogon eines idealen Primfactors gelten. ... In der Chemie hat man ferner zur Prüfung der in einem unbekannten aufgelösten Körper enthaltenen Stoffe die Reagentien, ... ganz dasselbe findet für die complexen Zahlen statt. Auch der Begriff der Aequivalenz ist in der Chemie fast derselbe, wie in der Theorie der complexen Zahlen ... Diese hier angedeuteten Analogieen sind nicht etwa als blosse Spiele des Witzes zu betrachten, sondern haben ihren guten Grund darin, dass die Chemie, so wie der hier behandelte Theil der Zahlentheorie, beide denselben Grundbegriff, nämlich den der Zusammensetzung, wenngleich innerhalb verschiedener Sphären des Seins, zu ihrem Principe haben." (Kummer, Crelle's Journ. Bd. 35. S. 360.)

Es lässt sich aus den kurzen Andeutungen, welche sich im Septemberhefte des Philosophical Magazine von 1866 über eine Mittheilung von C. L. Brodie befinden, die er in der Royal Society gemacht hat, und deren Titel ist „The calculus on Chemical Operations, being a Method for the Investigation, by means of Symbols, of the Laws of the Distribution of Weight in Chemical Change. — Part. I. On the Construction of Chemical Symbols", keine ausreichende Vorstellung seiner von den angegebenen Principien ausgehenden Methode der Zerlegung chemischer Formeln gewinnen. Wenn aber nicht alles täuscht, so ist von dieser Seite her eine Anwendung mathematischer formaler Principien auf die Chemie eher zu erwarten, als von Seiten der Molecularphysik.

Historisches. Zugleich mit der geometrischen Darstellung der imaginären Zahlen in der Ebene musste die Frage entstehen, ob es nicht möglich sei, die Punkte und Strecken im Raume durch irgendwelche neue imaginäre Zahlen auszudrücken. Dies hat bereits Argand (Gergonne's Annalen Bd. 4. 1813. S. 146) durch $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ vergeblicher Weise versucht. Auch Servois

machte (ebenda, S. 235) eine dahin zielende Bemerkung, ohne sie weiter auszuführen. In England hat sich das Interresse für diese Frage immer rege erhalten: Sir W. R. HAMILTON beschäftigte sich in fortwährender Verbindung mit den Brüdern JOHN T. GRAVES und CHARLES GRAVES, mit solchen Versuchen, von denen er in der umfangreichen Vorrede zu seinen Lectures on Quaternions einen höchst interessanten Bericht erstattet. Von der Darstellung der Punkte im Raume durch Complexe (a_1, a_2, a_3) (vergl. oben S. 72) ausgehend, handelte es sich darum, solche Verknüpfungen derselben zu erfinden, welche natürlichen geometrischen Verhältnissen entsprechen. Die Aufstellung solcher war insofern Sache freier Production, als es nothwendig war, einige Eigenschaften der gemeinen 4 Species aufzugeben; aber welche? HAMILTON wurde erst durch viele vergebliche Bemühungen davon überzeugt, dass man nicht, wie er anfangs meinte, das commutative Princip festhalten könne, ohne das distributive zu verletzen, und dass letzteres in der That die wesentlichste Eigenschaft der Multiplication sei. So stellte er die allgemeinen Verknüpfungsgesetze der Complexe $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, die er später auch in der Form $a_1 \iota_1 + \ldots + a_n \iota_n$ schrieb, auf und untersuchte verschiedene particulare Multiplicationen, die ihn 1843 endlich auf seine Quaternionen führten.

Gleichzeitig hat in Deutschland H. GRASSMANN (in den S. 16 angeführten Schriften, sowie in CRELLE's Journal Bd. 31. S. 111. Bd. 36. S. 177. Bd. 42. S. 187. Bd. 49. S. 1 und S. 123. Bd. 52. S. 254.) im Raume oder überhaupt in einem Gebiete, welches aus mehreren von einander unabhängigen stetigen Elementaränderungen besteht, Operationen vorgenommen, welche in algebraischer Fassung Additionen und Multiplicationen complexer Zahlen darstellen, und hat deren Natur in sehr allgemeiner und eingehender Weise untersucht. —

Wir haben in unserem Texte nur solcher complexer Zahlen gedacht, bei deren Multiplication das associative und distributive Princip erfüllt ist. An und für sich aber steht dem nichts entgegen, dass man eines dieser Gesetze theilweise fallen lässt und dafür etwa das commutative permanent erhält. In der That hat H. SCHEFFLER („Ueber d. Verh. d. Arith. z. Geom., in's Bes. üb. d. geom. Bed. d. imag. Zahlen", 1846, und im „Situationscalcul" 1851) eine Art von complexen Zahlen zur Behandlung räumlicher Verhältnisse aufgestellt, welche durchaus commutativ in ihrer Multiplication, aber dem distributiven Gesetz im Allgemeinen nicht unterworfen sind.

Die aus $(2n-1)$ complexen Einheiten gebildeten Zahlen KIRKMAN's (On Pluquaternions and Homoid Products of Sums of n Squares, Phil. Mag. Dec. 1848. S. 447 und S. 494, s. auch CAYLEY Phil. Mag. März 1845. S. 210) haben im Allgemeinen nicht die associative Eigenschaft in ihrer Multiplication.

Ich habe bei dem geringen, oder mindestens ganz speciellen Werthe, welcher diesen letzten Zahlensystemen zukommt, von ihrer Darstellung absehen zu sollen geglaubt, wenngleich es an sich immer interessant bleibt, die Multiplication unter so ganz verschiedenen particulären Bedingungen in ihren Eigenthümlichkeiten zu untersuchen. —

Von besonderer Bedeutung ist der Umstand, dass ein inniger Zusammenhang zwischen der Functionenlehre complexer Zahlen höherer Ordnung und dem sogenannten Operationscalcul, also einer symbolischen Zusammenfassung gewisser Zahlenoperationen besteht. So lässt sich z. B. die Functionaldeterminante als Potenz der Derivirten einer Function höherer complexer Zahlen darstellen. Ferner lässt sich der namentlich von CAYLEY und seiner Schule ausgebildete „hyperdeterminant calculus" in eine Form bringen, welche im engsten Zusammenhange mit der Theorie complexer Zahlen steht, wie ich dies in nächster Zeit nachzuweisen hoffe.

§. 29.

Begrenztes complexes System.

Die in gewisser Hinsicht einfachste Multiplication höherer complexer Zahl erhält man, wenn sich die Producte der Einheiten wieder auf die Einheiten selbst reduciren, nämlich lineare Functionen derselben sind, also, wenn n Einheiten vorhanden sind, das Product:

$$\iota_k \iota_m = a_{k,m} + a'_{k,m} \iota_1 + a''_{k,m} \iota_2 + \dots + a^{(n)}_{k,m} \iota_n$$

ist. Um die Natur dieses Zahlensystemes weiter zu untersuchen, eliminiren wir aus den $(n-1)$ nach $\iota_2, \iota_3 \dots \iota_n$ linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \iota_1 \iota_2 &= a_{1,2} + a'_{1,2} \iota_1 + a''_{1,2} \iota_2 + \dots + a^{(n)}_{1,2} \iota_n \\ \iota_1 \iota_3 &= a_{1,3} + a'_{1,3} \iota_1 + a''_{1,3} \iota_2 + \dots + a^{(n)}_{1,3} \iota_n \\ &\dots\dots\dots \\ \iota_1 \iota_n &= a_{1,n} + a'_{1,n} \iota_1 + a''_{1,n} \iota_2 + \dots + a^{(n)}_{1,n} \iota_n \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} -a_{1,2} - a'_{1,2}\iota_1 &= (a''_{1,2} - \iota_1)\iota_2 + a'''_{1,2}\iota_3 + \dots + a^{(n)}_{1,2}\iota_n \\ -a_{1,3} - a'_{1,3}\iota_1 &= a''_{1,3}\iota_2 + (a'''_{1,3} - \iota_1)\iota_3 + \dots + a^{(n)}_{1,3}\iota_n \\ &\dots\dots\dots \\ -a_{1,n} - a'_{1,n}\iota_1 &= a''_{1,n}\iota_2 + a'''_{1,n}\iota_3 + \dots + (a^{(n)}_{1,n} - \iota_1)\iota_n \end{aligned}$$

deren Determinante

$$\begin{vmatrix} a''_{1,2} - \iota_1 & a'''_{1,2} & \dots & a^{(n)}_{1,2} \\ a''_{1,3} & a'''_{1,3} - \iota_1 & \dots & a^{(n)}_{1,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{1,n} & a'''_{1,n} & \dots & a^{(n)}_{1,n} - \iota_1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

ist, die $\iota_2, \dots \iota_n$. Dann werden diese durch einen Quotienten dargestellt, welcher im Zähler und Nenner eine Function $(n-1)$ten Grades von ι_1 enthält, und substituirt man sie in der Relation:

$$\iota_1\,\iota_1 = a_{1,1} + a'_{1,1}\,\iota_1 + \ldots + a^{(n)}_{1,1}\,\iota_n,$$

so verwandelt sich letztere in eine Gleichung $(n+1)$ten Grades in Bezug auf ι_1, deren höchstes Glied den Coefficienten ± 1 hat, während alle anderen die gemeinen complexen Zahlen a, aber durchaus keinen Nenner enthalten, so dass also

$$\iota_1^{n+1} + b_1\,\iota_1^n + \ldots + b_{n+1} = 0,$$

wo die $b_1 \ldots b_{n+1}$ gemeine complexe Zahlen sind. Die Gleichung

$$x^{n+1} + b_1\,x^n + \ldots + b_{n+1} = 0$$

hat nun jedenfalls n gemeine complexe Wurzeln $c_1 \ldots c_{n+1}$ so dass

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_{n+1} = -\,b_1$$

$$c_1\,c_2 + c_1\,c_3 + c_2\,c_3 + \ldots = +\,b_2$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$c_1\,c_2 \ldots c_{n+1} = (-1)^{n+1}\,b_{n+1}$$

also ist identisch:

$$\iota_1^{n+1} + b_1\,\iota_1^n + \ldots + b_{n+1} = \iota_1^{n+1} - (c_1 + c_2 + \ldots + c_{n+1})\,\iota_1^n + \ldots + (-1)^{n+1}\,c_1\,c_2 \ldots c_{n+1}$$

und, da auf ι_1 alle gewöhnlichen Multiplicationsregeln anwendbar sind, hat man diese ganze Function

$$= (\iota_1 - c_1)\,(\iota_1 - c_2) \ldots (\iota_1 - c_{n+1})$$

Es ist nun ι_1 so zu bestimmen, dass dieses Product verschwindet. Geschieht dies, indem ein Factor desselben der Null gleich, also $\iota_1 = c_k$ gesetzt wird, so wäre ι_1 eine gemeine complexe Zahl und daher keine neue imaginäre Einheit. Soll sie aber eine neue imaginäre Einheit sein, so muss vorstehendes Product verschwinden, ohne dass einer seiner Factoren Null wird.

In dem Ausnahmefalle, dass $a_{1,2}, \ldots a_{1,n}, a'_{1,2}, \ldots a'_{1,n}$ Null sind, muss obige Determinante (1) verschwinden, woraus sich ι_1 ebenfalls als gemeine complexe Zahl bestimmen würde.

Ein höheres complexes Zahlensystem, dessen formale Rechnungsoperationen nach den Bedingungen des §. 28 bestimmt sind, und dessen Einheitsproducte in's Besondere lineare Functionen der ursprünglichen Einheiten sind, und in welchem kein Product verschwinden kann, ohne dass einer seiner Factoren Null würde, enthält also in sich einen Widerspruch und kann nicht existiren.

Will man also ein complexes Zahlensystem annehmen, welches ein begrenztes insofern ist, als es bei der Multiplication nicht auf neue Einheiten führt und in welchem die Einheitsproducte, wie bei den gemeinen complexen Zahlen, auf die Einheiten selbst linear reducirt werden können, so muss man die Eigenschaft des gemeinen Productes, nur durch das Nullwerden eines seiner Factoren zu verschwinden, aufgeben. In einem solchen Systeme wird daher ein Product nicht jedesmal seinen Werth ändern, wenn der eine Factor sich verändert, während der andere constant bleibt, und die Division wird in gewisser Weise unbestimmt.

Damit ist die Frage beantwortet, deren Lösung Gauss*) versprochen, aber nicht gegeben hat, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können.“ Jede mögliche Art von complexen Grössen wird sich in ihrer Multiplication durch eine wesentliche Eigenschaft von den gewöhnlichen Zahlen der Algebra unterscheiden müssen.

§. 30.

Complexes System mit zwei Einheiten.

Lässt man einem Zahlensysteme, dessen Einheitsproducte sich wieder auf die Einheiten linear reduciren, die Eigenschaft zu, dass ein Product verschwinden könne, ohne dass einer seiner Factoren verschwindet, so liegt in ihm nichts Widersprechendes.

Das aus der numerischen und einer anderen Einheit ι gebildete System, wo ι der Gleichung

$$\iota\,\iota = -1$$

genügt, und auch sonst alle Eigenschaften der gewöhnlichen imaginären Einheit i hat, ohne aber mit ihr identificirt werden zu können, hat besonderes Interesse dadurch, dass es zur Erläuterung der auf S. 70 gemachten Bemerkungen dienen kann. Sind $a_1, b_1 \ldots a_n, b_n$ x, y gemeine reelle Zahlen und wird im vorliegenden Systeme die Wurzel $\xi = x + y\,\iota$ der Gleichung

---

*) S. Werke, Bd. II. S. 178.

$$\xi^n + (a_1 + b_1 \iota)\, \xi^{n-1} + \ldots + (a_n + b_n \iota) = 0 \qquad (1)$$

gesucht, so findet man, wenn man nach der Substitution von $\xi = x + y\,\iota$ entwickelt, und den von ι freien, sowie den mit ι multiplicirten Theil einzeln der Null gleich setzt, zwei Gleichungen in x, y, welche genau mit denen übereinstimmen, die man mit der Substitution $\xi = x + y\,i$ aus

$$\xi^n + (a_1 + b_1 i)\, \xi^{n-1} + \ldots + (a_n + b_n i) = 0 \qquad (2)$$

abgeleitet hätte. Diesen beiden Gleichungen kommen dann nach dem Fundamentalsatze der Algebra nicht mehr und nicht weniger als n Paare reeller Werthe von x, y nämlich $x_1, y_1; \ldots x_n, y_n$, zu, welche die gewöhnlichen complexen Wurzeln

$$x_1 + y_1 i, \ldots x_n + y_n i$$

der Gleichung (2) ergeben, und auch jetzt werden:

$$x_1 + y_1 \iota, \ldots x_n + y_n \iota$$

n Wurzeln der Gleichung (1) in dem neuen Systeme sein.

Jene zwei Gleichungen $n$ten Grades in x, y geben aber durch Elimination eine Gleichung n^2ten Grades für x, so dass im Ganzen n^2 verschiedene Paare zusammengehöriger Werthe x, y, unter ihnen jene n reellen gefunden werden. Die anderen Paare $x_{n+1}, y_{n+1}; \ldots x_{n^2}, y_{n^2}$ sind gewöhnliche complexe Zahlen, welche zu

$$x_{n+1} + y_{n+1} i, \ldots x_{n^2} + y_{n^2} i$$

vereinigt, jene n Wurzelpaare

$$x_1 + y_1 i, \ldots x_n + y_n i$$

immer wieder erzeugen, indem die reellen und imaginären Theile in ihnen nur anders gruppirt sind.

Anders aber verhält sich dies in unserem Systeme der ι; denn die Wurzeln der Gleichung (1)

$$x_{n+1} + y_{n+1} \iota, \ldots x_{n^2} + y_{n^2} \iota$$

werden von den Wurzeln

$$x_1 + y_1 \iota, \ldots x_n + y_n \iota$$

im allgemeinen wesentlich verschieden sein, da sich Glieder mit i, ι, $i\,\iota$ multiplicirt gegen einander nicht aufheben können. Hieraus geht denn hervor, dass in unserem Systeme eine Gleichung $n$ten Grades, wie (1), n Wurzeln mit reellen Coefficienten und $n\,(n-1)$ Wurzeln mit gemeinen imaginären Coefficienten besitzt (vergl. §. 45).

So hat z. B.

$$\xi^2 = 1$$

die Wurzeln:

$$+1, \ -1, \ +i\iota, \ -i\iota.$$

Die Gleichung

$$\xi^3 = 1$$

hat, wenn man zur Abkürzung:

$$a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha = \frac{-1 + \iota\sqrt{3}}{2}$$

setzt, die 9 Wurzeln:

$$1; \ a, \ a^2; \ \alpha, \ \alpha^2; \ a\,\alpha, \ a^2\alpha; \ a\,\alpha^2, \ a^2\alpha^2.$$

Die Gleichung:

$$\xi^4 = 1$$

hat die 16 Wurzeln, welche durch Vertauschung der Zeichen aus:

$$\pm 1, \quad \pm i, \quad \pm \iota, \quad \pm i\iota, \quad \pm \tfrac{1}{2}(1 \pm i)(1 \pm \iota)$$

hervorgehen u. s. w.

Solche Verhältnisse, wie sie hier geschildert sind, treten in der Quaternionentheorie ein, wenn, geometrisch gesprochen, alle Coefficienten Quaternionen in einer Ebene sind und auch nur nach den in dieser Ebene liegenden Quaternionen gefragt wird, s. Hamilton, Elements of Quaternions. S. 275 u. ff.

Mit Zahlensystemen, welche aus nur zwei Einheiten gebildet sind, haben sich John T. Graves (On a connection between the general theory of Normal Couples and the Theory of Complete Quadratic Functions of two Variables. Phil. Magaz. April 1845. S. 315) und Cayley (On algebraical couples, Phil. Magaz. Juli 1845. S. 38), aber ohne sonderlichen Erfolg beschäftigt.

§. 31.

Unbegrenztes commutatives System.

Ganz andere Verhältnisse, wie die eben behandelten treten ein, wenn die Producte der ursprünglichen Einheiten von ihnen selbst wesentlich verschieden und commutativ sind und unter sich auch in keinen weiteren Relationen stehen, als solchen, die aus dem commutativen Multiplicationsbegriff unmittelbar hervorgehen. Es sind dann:

$$\iota_1, \ \iota_2, \ \ldots \ \iota_n$$

die Einheiten ersten Grades, die $\frac{n.n+1}{2}$ Producte

$$\iota_1\,\iota_1, \quad \iota_1\,\iota_2, \quad \iota_1\,\iota_3, \quad \iota_2\,\iota_2, \quad \iota_2\,\iota_3, \ \ldots$$

die Einheiten zweiten Grades, und überhaupt die Producte zu je m, mit und ohne Wiederholungen die Einheiten $m$ten Grades. Eine Zahl in diesem Systeme wird allgemein von der Form:

$$\alpha = a_1 \varkappa_1 + a_2 \varkappa_2 + a_3 \varkappa_3 + \ldots$$

sein, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \ldots$ Einheiten irgend welchen und zwar im Allgemeinen verschiedenen Grades bezeichnen.

Dann lässt sich der für die Rechnung mit solchen Zahlen fundamentale Satz beweisen, dass, wenn ein Product $\alpha\beta$, dessen einer Factor α nicht Null ist, verschwindet, nothwendig der andere Factor β Null sein muss.

Um dies zu erweisen, ordne man die Einheiten nach ihrem Grade, so dass die ersten Grades denen des zweiten u. s. w. vorangehen. In einer Einheit $m$ten Grades, also einem Producte von m Einheiten, denke man sich die Factoren so geordnet, dass nie ein höherer Index einem niedrigeren vorangeht. Dann ordne man ferner die verschiedenen Einheiten eines und desselben Grades, so dass, wenn man die m Indices als eine m zifferige Zahl liest, in der Reihe die niedrigere Zahl immer der höheren vorangeht, also z. B. wenn 3 Einheiten gegeben sind, würde die Folge sein:

$$\iota_1, \ \iota_2, \ \iota_3, \ \iota_1\iota_1, \ \iota_1\iota_2, \ \iota_1\iota_3, \ \iota_2\iota_2, \ \iota_2\iota_3, \ \iota_3\iota_3, \ \iota_1\iota_1\iota_1, \ \iota_1\iota_1\iota_2 \ldots$$

so dass überhaupt die kleinere Zahl, welche die Indices zeigen, immer der grösseren vorangeht.

Denken wir uns nun in α, β die Einheiten so geordnet, so wird

$$\alpha = a_1 \varkappa_1 + a_2 \varkappa_2 + \ldots$$

gesetzt werden können, wo $\varkappa_1$ eine Einheit irgend welchen Grades bedeutet, die niedrigste, welche in dem von Null verschiedenen α erscheint, und a_1 von Null verschieden ist. Ebenso wird

$$\beta = b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \ldots$$

gesetzt werden können, wo $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ ebenfalls Einheiten irgend welchen Grades sind. Soll dann

$$\alpha\beta = \Sigma\, a_m\, b_n\, \varkappa_m\, \lambda_n = 0$$

sein, so müssen die Coefficienten der von einander verschiedenen Einheiten verschwinden, also

$$\Sigma\, a_m\, b_n = 0$$

sein, wo die Summe über alle Werthe von m und n auszudehnen

ist, für welche $\varkappa_m$ λ_n das Product derselben Einheiten darstellt, also die aus den m Indices von $\varkappa_m$ und den n von λ_n der Reihe nach zusammengesetzte Zahl immer dieselben Ziffern, wenn auch überall in anderer Reihenfolge, enthält.

Es leuchtet aber unmittelbar ein, dass die erste dieser Gleichungen $a_1\, b_1 = 0$ lautet, woraus, da a_1 nicht Null sein soll, $b_1 = 0$ folgt. Setzt man dies in β ein, so erhält man dann als erste Gleichung $a_1\, b_2 = 0$, also $b_2 = 0$ u. s. f., q. e. d.

Es folgt hieraus die allgemeine Eigenschaft eines Zahlensystemes von der jetzt betrachteten Art, dass sich ein Product ändert, wenn sich einer seiner Factoren ändert, während der andere constant bleibt.

Denn ist $\alpha\beta = \alpha\beta'$, wo α nicht verschwindet, so ist $\alpha(\beta - \beta') = 0$; da dieses Product aber nach vorstehendem nur verschwinden kann, wenn der Factor $(\beta - \beta')$ verschwindet, so muss $\beta = \beta'$ sein.

Die Division ist also in diesem Gebiete mit Ausnahme des einzigen Falles, dass der Divisor die Null ist, eindeutig bestimmt. Ueberhaupt lassen sich in diesem Zahlensysteme, wie man sieht, alle 4 Species genau ebenso ausführen, als in dem Gebiete der gemeinen complexen Zahlen, mit dem einzigen, aber allerdings wesentlichen Unterschiede, dass die Producte der Einheiten nicht auf die ursprünglichen linear reducirt werden können.

Vergl. Grassmann, Ausdehnungslehre von 1862, S. 233.

§. 32.

Die Addition von Strecken.

Schon in §. 20 haben wir einen Additionsbegriff von Strecken kennen gelernt, welcher vollständig mit demjenigen übereinstimmt, welchen die Additionsregeln der complexen Zahlen (§. 28) geben, wenn wir mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ die rechtwinkligen Projectionen einer Strecke a auf drei orthogonale Axen $\dot{i}_1$, $\dot{i}_2$, $\dot{i}_3$ bezeichnen und

$$a = \mathfrak{a}_1\, \dot{i}_1 + \mathfrak{a}_2\, \dot{i}_2 + \mathfrak{a}_3\, \dot{i}_3$$

setzen, wo $\dot{i}_1$, $\dot{i}_2$, $\dot{i}_3$ an Länge der Einheit gleich genommen werden. Die Summe zweier Strecken, welche auch bei dieser Auffassung als parallel verschiebbar angesehen werden können, ist aus §. 28:

$$a + b = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1)\, i_1 + (\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2)\, i_2 + (\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{b}_3)\, i_3$$

ganz entsprechend den Regeln des §. 20.

Dieselbe Darstellung der Strecken würde auch zulässig sein, wenn man die Axen i_1, i_2, i_3 schief gegen einander annähme und unter $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ die Projectionen von a auf die Axen resp. parallel den Ebenen $i_2\, i_3$, $i_3\, i_1$, $i_1\, i_2$ verstände; die Addition erfolgt dann nach ganz denselben Regeln.

Welchen Bestimmungen auch die Multiplication der Einheiten i_1, i_2, i_3 und damit der Strecken unterliegen möge, ihre Addition ist in allen Systemen eine und dieselbe.

§. 33.

Die Addition von Punkten. — Der barycentrische Calcul.

Will man den Begriff der Addition auf Punkte im Raume übertragen, so ist es zunächst nothwendig, den Punkten, um sie zu Grössen zu machen, welche einer Vervielfachung und Theilung nach reellen Zahlen $\mathfrak{a}$ fähig sind, einen Coefficienten, ein Gewicht beizulegen und den Punkt A als einfachen von dem $\mathfrak{a}$ fachen Punkte $\mathfrak{a}\, A$ zu unterscheiden, wobei man sich beide an derselben Stelle im Raume zu denken hat. Dadurch ist es dann möglich, die Summe $C + C$ durch denselben Punkt C, aber doppelt genommen, also $2\, C$ auszudrücken.

Wollte man $2\, C$ als einen nicht mit C zusammenfallenden Punkt ansehen, sondern als einen anderen, so müsste man offenbar von vorn herein ein geometrisches Gebilde gegeben haben, auf welches die Lage von C bezogen werden könnte. Wenn wir aber die Punkte ohne alle solche Beziehung, rein an und für sich, im freien Raume betrachten, so ist nur jene Interpretation zulässig.

Was man nun unter der Summe zweier Punkte A, B zu verstehen habe, ist nach dem Princip der Permanenz zu bestimmen. Dies allein aber reicht hier noch nicht aus, vielmehr wird man noch die eben gemachte Voraussetzung der gänzlichen Beziehungslosigkeit der Punkte auf irgend welche Ausgangspunkte hinzunehmen müssen, um zu erkennen, dass die Commutativität der Addition verlangt, dass die Summe $(A + B)$ etwas darstelle, was gegen A genau dieselbe Beziehung hat, wie gegen B. Setzen wir ferner fest, und dies ist die einzige arbiträre Annahme, dass $(A + B)$ wieder ein Punkt sei, so erweist sich die Mitte beider Punkte C als der einzig mögliche. Es ist aber

$$A + B = 2\, C$$

zu setzen, damit beim Zusammenfallen von A, B mit C sich kein Widerspruch ergiebt.

Um mehrfache Punkte zu addiren, wird man diese Operation mehrmals auszuführen haben und so zu der Definitionsgleichung:

$$\mathfrak{a} A + \mathfrak{b} B = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) C \qquad (1)$$

gelangen, wo C auf der Geraden $A B$ so liegt, dass die Strecken

$$A C : C B = \mathfrak{b} : \mathfrak{a}.$$

Der Begriff der Summe, wie er hier analytisch entwickelt ist, entspricht vollkommen der allgemeinen Vorstellung der Addition, als der thetischen Vereinigung von Objecten, welche beide implicite und zu einem neuen Ganzen verschmolzen enthält. Noch mehr wird er dadurch erläutert, dass C den Schwerpunkt der mit den Gewichten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ belasteten Punkte A, B mit einem Gewichte darstellt, welches der Summe beider Gewichte gleich ist. Der Schwerpunkt ist aber mechanisch der Vereinigung der beiden Punkte A, B mit ihren Gewichten, vollkommen äquivalent.

Es ist nicht unwesentlich zu bemerken, dass die Gleichung (1) leicht in eine solche zwischen einfachen reellen Grössen umgestaltet werden kann.

Es seien (Fig. 10) durch A, B zwei Parallelen gezogen und auf A, B der Punkt C in der angegebenen Weise bestimmt, so dass für jede durch C gehende Gerade $A'' B''$

$$A A'' : B B'' = A C : B C = - \mathfrak{b} : \mathfrak{a}.$$

Fig. 10.

Ist nun $A' B'$ parallel $A'' B''$, $C C'$ parallel $A A'$, $B B'$, so hat man ohne weiteres: $\mathfrak{a} A'' A' + \mathfrak{b} B'' B' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) C C'$, also da $\mathfrak{a} A A'' + \mathfrak{b} B B'' = 0$, durch Addition

$$\mathfrak{a} A A' + \mathfrak{b} B B' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) C C' \qquad (2)$$

Zieht man also durch A, B, C Parallelen und schneidet diese durch eine Gerade (oder Ebene) in A', B', C', so wird die Gleichung (1) sich auf einfache Grössen beziehen, wenn man die Punkte A, B, C durch die Abschnitte $A A'$, $B B'$, $C C'$ ersetzt.

Sind 3 Punkte A, B, C und 3 Coefficienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gegeben, so wird man den Schwerpunkt E derselben erhalten, wenn man zunächst den Schwerpunkt D von A und B, und dann den Schwerpunkt E von C und D sucht.

Legt man durch A, B, C, D, E Parallelen in irgend welcher Richtung und schneidet sie durch irgend eine Ebene in A', B', C', D', E', so ist

$$\mathfrak{a} A A' + \mathfrak{b} B B' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) D D',$$

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) D D' + \mathfrak{c} C C' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) E E'$$

also

$$\mathfrak{a} A A' + \mathfrak{b} B B' + \mathfrak{c} C C' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) E E'$$

Unter der hier gemachten Voraussetzung, dass $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ nicht Null sei, verschwindet jene Summe der Abschnitte somit nur für eine durch E gelegte Ebene. Wäre man nicht von A und B ausgegangen, sondern von B und C, um den Schwerpunkt zu bestimmen, so wäre man auf einen Punkt F gekommen

von der Beschaffenheit, dass für alle durch ihn gelegten Ebenen die Summe der Abschnitte auf jenen 3 Parallelen Null ist. Da dies aber nur für den Punkt E stattfindet, so ist F identisch mit E, und daher der Schwerpunkt der drei Punkte unabhängig von der Ordnung, in welcher man A, B, C miteinander verknüpft. Diese Betrachtungen liefern so den Satz:

Die Summe von drei Punkten ist associativ:

$$\mathfrak{a}\, A + \mathfrak{b}\, B + \mathfrak{c}\, C = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})\, E$$

Die Addition genügt also allen formalen Bedingungen, die zu ihrem Begriffe nothwendig sind.

Einer besonderen Betrachtung bedarf die Summe (1) im Fall $\mathfrak{a} = - \mathfrak{b}$; denn dann existirt kein Schwerpunkt für $\mathfrak{a}\, A + \mathfrak{b}\, B$, oder kein Punkt, welcher $(B - A)$ gleich gesetzt werden könnte, ausser dem unendlich fernen Punkte der Geraden $A\,B$ mit dem Coefficienten Null. Es wird daher unter $(B - A)$ kein endlicher Punkt, wohl aber die Strecke $A\,B$ verstanden werden können. Denn diese ist das einfachste, nicht punktförmige Gebilde, welches durch die beiden Punkte A, B selbst, ohne alle Beziehung zu anderen Objecten bestimmt ist, und den Charakter hat, sein Zeichen zu ändern, wenn A mit B vertauscht wird. Was aber an dieser Strecke durch $(B - A)$ eigentlich dargestellt sei, ob ihre Grösse, Richtung, Ort, wird entschieden, wenn wir die Frage beantworten, welche Strecken einander gleich seien. Aus (Fig. 11)

$$B - A = D - C$$

aber folgt, wenn die Additionsgesetze allgemein gelten sollen:

$$A + D = B + C.$$

Nun ist $A + D = 2\,E$, wo E die Mitte der Diagonale $A\,D$ des Vierecks $A\,B\,D\,C$, $B + C = 2\,E'$, wo E' die Mitte der anderen Diagonale bezeichnet. Da E mit E' zusammenfallen soll, sich also die Diagonalen halbiren müssen, so ist das Viereck $A\,B\,D\,C$ ein Parallelogramm. Man hat daher $B - A = D - C$, wenn die Strecken $A\,B$, $C\,D$ gleich lang, gleichgerichtet und parallel sind.

Fig. 11.

Es stimmt also die sich so ergebende Definition der Strecken mit der in §. 20 ohne diese Rechtfertigung benutzten überein. Alle einander gleichen Strecken haben denselben unendlich fernen Punkt, als dessen Repräsentanten sie angesehen werden können. Die Addition der Strecken ergibt sich aus der Identität:

$$(C - B) + (B - A) = C - A \text{ oder } B\,C + A\,B = A\,C$$

ganz gleich der in §. 20 gelehrten.

Was man unter der Summe eines Punktes A und einer Strecke a zu verstehen habe, ersieht man sofort, wenn man a mit sich parallel verschiebt, so dass $a = B - A$; dann ist $A + a = B$.

Wenn

$$\mathfrak{m}_1\, I_1 + \mathfrak{m}_2\, I_2 = \mathfrak{m}\, M, \quad \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}$$

so liegt M mit I_1, I_2 in gerader Linie, und umgekehrt: Liegt M mit I_1, I_2 in gerader Linie, so kann das Verhältniss $\mathfrak{m}_1 : \mathfrak{m}_2$ nur auf eine Weise dieser Gleichung entsprechend angenommen werden.

Wenn I_1, I_2, I_3 nicht in gerader Linie liegen und

$$\mathfrak{m}_1 I_1 + \mathfrak{m}_2 I_2 + \mathfrak{m}_3 I_3 = \mathfrak{m} M, \quad \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 = \mathfrak{m}$$

ist, so liegt M mit I_1, I_2, I_3 in einer Ebene, und umgekehrt: Liegt M mit I_1, I_2, I_3 in einer Ebene, so können die Verhältnisse $\mathfrak{m}_1 : \mathfrak{m}_2 : \mathfrak{m}_3$ nur auf eine Weise dieser Gleichung entsprechend angenommen werden. Denn sei Z der Durchschnitt der Linien $I_1 I_2$, $I_3 M$, so kann man die Verhältnisse $\mathfrak{m}_1 : \mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{m}_3 : \mathfrak{m}$ nur auf eine Weise so bestimmen, dass:

$$\mathfrak{m}_1 I_1 + \mathfrak{m}_2 I_2 = (\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) Z$$

$$\mathfrak{m}_3 I_3 - \mathfrak{m} M = (\mathfrak{m}_3 - \mathfrak{m}) Z$$

Addirt man beide Gleichungen, so erhält man den obigen Ausdruck von M durch I_1, I_2, I_3, wenn man

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 = \mathfrak{m}$$

setzt, also etwa das Verhältniss $\mathfrak{m}_2 : \mathfrak{m}_3$ hieraus bestimmt.

Wenn I_1, I_2, I_3, I_4, M fünf beliebige, nicht in einer Ebene liegende Punkte sind, so lassen sich die Verhältnisse $\mathfrak{m}_1 : \mathfrak{m}_2 : \mathfrak{m}_3 : \mathfrak{m}_4$ nur auf eine Weise so bestimmen, dass

$$\mathfrak{m}_1 I_1 + \mathfrak{m}_2 I_2 + \mathfrak{m}_3 I_3 + \mathfrak{m}_4 I_4 = \mathfrak{m} M$$

Denn schneidet $I_4 M$ die Ebene $I_1 I_2 I_3$ in Z, so können die Verhältnisse $\mathfrak{m}_1 : \mathfrak{m}_2 : \mathfrak{m}_3$ und $\mathfrak{m}_4 : \mathfrak{m}$ nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass:

$$\mathfrak{m}_1 I_1 + \mathfrak{m}_2 I_2 + \mathfrak{m}_3 I_3 = (\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3) Z$$

$$\mathfrak{m}_4 I_4 - \mathfrak{m} M = (\mathfrak{m}_4 - \mathfrak{m}) Z$$

und bestimmt man jene $\mathfrak{m}_1 : \mathfrak{m}_2 : \mathfrak{m}_3 : \mathfrak{m}_4 : \mathfrak{m}$ so, dass

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \mathfrak{m}_4 = \mathfrak{m}$$

so erhält man obigen Ausdruck durch Addition jener Hilfsgleichungen.

Aus allem diesem folgt das Porisma: durch 2 Punkte in einer Geraden, 3 in einer Ebene, 4 im Raume kann jeder Punkt resp. der Geraden, der Ebene, des Raumes linear dargestellt werden.

Nimmt man nun I_1, I_2, I_3, I_4 als 4 feste Fundamentalpunkte im Raume an, und stellt jeden fünften Punkt M durch

$$\mathfrak{m} M = \mathfrak{m}_1 I_1 + \mathfrak{m}_2 I_2 + \mathfrak{m}_3 I_3 + \mathfrak{m}_4 I_4 \qquad (3)$$
$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \mathfrak{m}_4$$

dar, so wird nach (1) die Addition desselben zu dem Punkte

$$\mathfrak{n} N = \mathfrak{n}_1 I_1 + \mathfrak{n}_2 I_2 + \mathfrak{n}_3 I_3 + \mathfrak{n}_4 I_4$$

in der Form:

$$\mathfrak{m} M + \mathfrak{n} N = (\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{n}_1) I_1 + (\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{n}_2) I_2 + (\mathfrak{m}_3 + \mathfrak{n}_3) I_3 + (\mathfrak{m}_4 + \mathfrak{n}_4) I_4$$

vollzogen — also genau nach den Regeln des §. 28. Man kann somit, wenigstens für die Addition, I_1, I_2, I_3, I_4 als 4 complexe Einheiten und jeden Punkt im Raume als eine aus ihnen linear abgeleitete complexe Zahl ansehen. Eine entsprechende Multiplication werden wir in §. 38 kennen lernen.

Bezeichnet R irgend einen Punkt, so erhält man, wenn man von vorstehender Gleichung (3) die Identität

$$\mathfrak{m} R = \mathfrak{m}_1 R + \mathfrak{m}_2 R + \mathfrak{m}_3 R + \mathfrak{m}_4 R$$

abzieht, die Formel (4):

$$\mathfrak{m}(M - R) = \mathfrak{m}_1 (I_1 - R) + \mathfrak{m}_2 (I_2 - R) + \mathfrak{m}_3 (I_3 - R) + \mathfrak{m}_4 (I_4 - R)$$

Wenn $\mathfrak{m} = 0$ ist, so ist M kein endlich entfernter Punkt, sondern eine Strecke; und es ist

$$\mathfrak{m}_1 I_1 + \mathfrak{m}_2 I_2 + \mathfrak{m}_3 I_3 + \mathfrak{m}_4 I_4 = \mathfrak{m}_1 (I_1 - R) + \mathfrak{m}_2 (I_2 - R) + \mathfrak{m}_3 (I_3 - R) + \mathfrak{m}_4 (I_4 - R)$$

Setzen wir $R = I_1$, so wird daher jede Strecke durch drei Strecken $I_2 I_1$, $I_3 I_1$, $I_4 I_1$ dargestellt werden können, womit man auf das Coordinatensystem des §. 32 zurückgeführt wird.

Selbstverständlich stellt die Summe:

$$\mathfrak{m} M = \mathfrak{m}_1 I_1 + \ldots + \mathfrak{m}_n I_n, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_n$$

den $\mathfrak{m}$ fachen Schwerpunkt M der mit den Gewichten $\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n$ belasteten Punkte $I_1 \ldots I_n$ dar. Wo auch R liege, immer ist

$$\mathfrak{m}(M - R) = \mathfrak{m}_1 (I_1 - R) + \ldots + \mathfrak{m}_n (I_n - R)$$

d. h. Verbindet man die Punkte $I_1 \ldots I_n$ mit R, trägt die $\mathfrak{m}_1, \ldots \mathfrak{m}_n$ fachen Strecken $R I_1, \ldots R I_n$ von R an, der Reihe nach stetig an einander ab, ohne ihre Richtung und Länge zu verändern, und schliesst das noch offene windschiefe Polygon durch die Verbindungslinie des letzten Endpunktes und des Anfangspunktes R, so geht diese letzte Seite durch den Schwerpunkt M des Punktsystemes der I und ist an Länge das $\mathfrak{m}$ fache der Linie $R M$.

Ist $\mathfrak{m} = 0$, so rückt jener Punkt M in's Unendliche, und es stellt $(\mathfrak{m}_1 I_1 + \ldots + \mathfrak{m}_n I_n)$ eine nach diesem gerichtete Strecke dar. Da dann:

$$\mathfrak{m}_1 I_1 + \ldots \mathfrak{m}_n I_n = \mathfrak{m}_1 (I_1 - R) + \ldots + \mathfrak{m}_n (I_n - R),$$

so ist jetzt die Summe rechter Hand eine an Länge und Richtung constante Strecke, wie auch R angenommen werden möge. —

Auf diese Principien gründet sich der „barycentrische Calcul" (1827) von Möbius, das System der ebenen Dreipunkt- und räumlichen Vierpunkt-Coordinaten. Erscheint auch bei ihm die Gleichung (1) nur als eine abgekürzte, insofern sie durch die obigen Bemerkungen in Gleichung (2) zwischen gewöhnlichen reellen Zahlen verwandelt wird, so ist doch jede natürlich sich darbietende Abkürzung eine nicht zufällige, sondern nothwendige und ihre Einführung ein wissenschaftlicher Fortschritt. In unserer Entwickelung bedarf es keiner weiteren Erläuterung, dass wir die vorstehends erläuterte Addition als die der Punkte selbst bezeichnen; wenn nur noch weiter eine geometrische Operation gefunden werden kann, welche zu dieser Addition in der Beziehung der Multiplication steht. Eine solche wird in §. 38 gegeben werden. —

Möbius hat (Ueber e. neue Behandl. d. anal. Sphärik, in den Abhandl. herausgeg. v. d. Jabłonowski'schen Ges. Leipzig 1846, S. 47, vergl. auch: Ueber d. Grundformen d. Lin. 3. Ordn., in den Abhandl. d. Kön. Sächs. Ges Bd. I. Leipzig 1852, S. 25) ein sphärisches Coordinatensystem aufgestellt, welches dem barycentrischen in der Ebene vollkommen entspricht. Es seien $A, B, C, D \ldots$ Punkte einer Kugel mit dem Mittelpunkte O, so setzt er:

$$\mathfrak{a} A + \mathfrak{b} B = \mathfrak{c} C \tag{1}$$

wenn die Resultante der nach A und B gerichteten, in O angreifenden Kräfte mit den Intensitäten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, nach C gerichtet und von der Intensität $\mathfrak{c}$ ist. Es ist dieser Begriff der Summe von Kugelpunkten gewissermassen die Projection des Begriffes der Summe von Strecken, auf die Kugel, und in der That kann vorstehende Gleichung sofort in eine, auf Strecken bezügliche verwandelt werden, indem man überall O hinzufügt:

$$\mathfrak{a}.OA + \mathfrak{b}.OB = \mathfrak{c}.OC \tag{2}$$

Es geht hieraus hervor, dass man jeden Punkt M der Kugel durch drei Fundamentalpunkte I_1, I_2, I_3 in der Form:

$$\mathfrak{m}_1 I_1 + \mathfrak{m}_2 I_2 + \mathfrak{m}_3 I_3 = \mathfrak{m} M \tag{3}$$

darstellen kann, womit man ein höchst brauchbares homogenes, sphärisches Coordinatensystem erhält. Man kann überdem zeigen, dass letztere Gleichung sich in eine andere zwischen reellen Grössen verwandeln lässt, indem sie gleichzeitig mit

$$\mathfrak{m}_1 \cos R I_1 + \mathfrak{m}_2 \cos R I_2 + \mathfrak{m}_3 \cos R I_3 = \mathfrak{m} \cos R M \tag{4}$$

besteht, wie auch der Punkt R auf der Kugel liege. Diese Gleichungen 1, 2, 3, 4 entsprechen, wie man sieht, vollkommen den ebenso bezifferten des Textes.

SIEBENTER ABSCHNITT.

Theorie und geometrische Darstellung der alternirenden Zahlen.

§. 34.

Reine Theorie der alternirenden Zahlen.

Wir betrachten in diesem Abschnitte Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ welche linear aus Einheiten $\iota_1, \ldots \iota_n$ zusammengesetzt sind, deren Multiplicationsregeln in den Relationen

$$\iota_1 \iota_1 = 0, \; \iota_2 \iota_2 = 0, \ldots \iota_n \iota_n = 0$$
$$\iota_k \iota_m = - \iota_m \iota_k$$

ausgesprochen sind. Man sieht, dass, wenn α, β Zahlen sind von der Form:

$$\alpha = a_1 \iota_1 + \ldots + a_n \iota_n$$
$$\beta = b_1 \iota_1 + \ldots + b_n \iota_n$$

das nach den S. 101 gegebenen Multiplicationsregeln gebildete Product

$$\begin{aligned}\alpha\beta = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\iota_1 \iota_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\iota_1 \iota_3 + \ldots + (a_1 b_n - a_n b_1)\iota_1 \iota_n \\ + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\iota_2 \iota_3 + \ldots + (a_2 b_n - a_n b_2)\iota_2 \iota_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})\iota_{n-1} \iota_n\end{aligned}$$

sein wird, und daher:

$$\alpha . \beta = - \beta . \alpha,$$

wie man leicht sieht. Ein Product kehrt überhaupt sein Zeichen um, wenn zwei aufeinanderfolgende Factoren desselben mit einander vertauscht werden. Will man zwei nicht aufeinander folgende

Factoren α, β eines Productes, zwischen denen m Factoren stehen, vertauschen, so denke man sich β mit dem nächstvorhergehenden Factor, dann wieder mit dem nächstvorhergehenden u. s. f. vertauscht, bis β vor α zu stehen kommt; bei diesen $(m+1)$ Vertauschungen hat das Vorzeichen des Productes $(m+1)$mal gewechselt. Vertauscht man jetzt weiter α mit dem nächstfolgenden Factor u. s. f., bis es die ursprüngliche Stelle von β einnimmt, so haben α, β ihre Stelle vertauscht und das Product hat $(2m+1)$mal sein Zeichen gewechselt. Durch Vertauschung zweier Factoren nimmt also ein Product jederzeit den entgegengesetzten Werth an. Die aus denselben Factoren durch Permutation zu bildenden Producte zerfallen in zwei Classen, welche sich durch das Vorzeichen unterscheiden; die gerader Classe gehen aus der ursprünglich festgesetzten Reihenfolge von Factoren durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Factoren hervor; die ungerader Classe durch eine ungerade Anzahl solcher Vertauschungen. Die Bestimmung der Classe, zu welcher eine Permutation der Factoren gehört, kann auf mannigfache Weisen geschehen, wie man dies in der Theorie der Determinanten*) auseinanderzusetzen pflegt.

Sind zwei Factoren eines Productes einander gleich oder unterscheiden sie sich nur durch einen gewöhnlichen Zahlenfactor, so verschwindet das Product, da aus $\beta\,\alpha = -\,\alpha\,\beta$ für $\beta = \alpha$

$$\alpha\,\alpha = 0$$

folgt, was auch α sei. Die zur Bestimmung der Einheitsproducte gegebenen Gleichungen gelten, wie man hieraus ersieht, auch für linear aus ihnen gebildete Zahlen, und diese charakteristischen Eigenschaften werden den Namen „alternirendes Zahlensystem“, welchen ich ihnen beilege, hinlänglich rechtfertigen.

Die Division ist in diesem Systeme unbestimmt. Denn es ist

$$\xi\,\beta = (\xi + m\,\beta)\,\beta$$

wenn m eine gemeine complexe Zahl bedeutet; ist also ein der Gleichung $\xi\,\beta = \gamma$ genügendes $\xi = \frac{\gamma}{\beta}$ gefunden, so ist

$$\xi = \frac{\gamma}{\beta} - m\,\beta$$

ihre allgemeine, und daher unendlich vieldeutige Lösung.

*) Baltzer, Determinanten, S. 1—5.

§. 35.

Zerlegung der Determinanten in Producte.

Das Product von n Factoren:

$$(a_{1,1}\,\iota_1 + \ldots + a_{n,1}\,\iota_n) \ldots (a_{1,n}\,\iota_1 + \ldots + a_{n,n}\,\iota_n)$$
$$= \sum a_{p_1,1} \ldots a_{p_n,n}\,\iota_{p_1} \ldots \iota_{p_n},$$

wo in der Summe $p_1 \ldots p_n$ alle Combinationen der Zahlen $1, \ldots n$ zu durchlaufen haben, reducirt sich auf einen bekannten Ausdruck. Da nämlich $\iota_{p_1} \ldots \iota_{p_n} = 0$ ist, sobald in der Combination $p_1 \ldots p_n$ dieselbe Zahl zweimal erscheint, so hat man in der Summe nur alle Permutationen ohne Wiederholung zu bilden; und da

$$\iota_{p_1} \ldots \iota_{p_n} = \pm\,\iota_1 \ldots \iota_n,$$

je nachdem $p_1, \ldots p_n$ eine aus $1, \ldots n$ abgeleitete Permutation gerader oder ungerader Classe ist, so erhält man nach dem bekannten Bildungsgesetze der Determinanten:

$$(a_{1,1}\,\iota_1 + \ldots + a_{n,1}\,\iota_n) \ldots (a_{1,n}\,\iota_1 + \ldots + a_{n,n}\,\iota_n) =$$
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \iota_1 \ldots \iota_n \qquad (1)$$

Es wird also durch die alternirenden Zahlen eine **allgemeine Determinante** $n$ten Grades in n **lineare Factoren zerlegt.** Es ist ferner:

$$(a_{1,1}\,\iota_1 + \ldots + a_{n,1}\,\iota_n) \ldots (a_{1,m}\,\iota_1 + \ldots + a_{n,m}\,\iota_n) =$$
$$\sum a_{p_1,1} \ldots a_{p_m,m}\,\iota_{p_1} \ldots \iota_{p_m} \qquad (2)$$

wo $p_1 \ldots p_m$ alle Combinationen der Zahlen $1, \ldots n$ mit Wiederholung durchlaufen. Ist $m > n$, so werden in dem Producte $\iota_{p_1} \ldots \iota_{p_m}$ stets einige Factoren gleich werden, und es ist daher jenes Product der Null gleich; ist $n = m$, so erhält man (1); ist $m < n$, so hat man für $p_1 \ldots p_m$ alle möglichen Gruppen verschiedener m Zahlen aus der Reihe $1, \ldots n$ zu setzen und diese untereinander zu permutiren, so dass man die Summe in (2)

$$= \sum \begin{vmatrix} a_{p_1,1} & a_{p_1,2} & \dots & a_{p_1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_m,1} & a_{p_m,2} & \dots & a_{p_m,m} \end{vmatrix} \iota_{p_1} \dots \iota_{p_m} \qquad (3)$$

erhält, wo $p_1 \dots p_m$ nur alle verschiedenen Gruppen von m Zahlen aus $1, \dots n$ ohne Wiederholung bedeuten. Multiplicirt man vorstehende Gleichung mit:

$$(a_{1,m+1}\,\iota_1 + \dots + a_{n,m+1}\,\iota_n) \dots (a_{1,n}\,\iota_1 + \dots + a_{n,n}\,\iota_n) =$$

$$\sum \begin{vmatrix} a_{p_{m+1},m+1} & \dots & a_{p_{m+1},n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_n,m+1} & \dots & a_{p_n,n} \end{vmatrix} \iota_{p_{m+1}} \dots \iota_{p_n}$$

so findet man den LAPLACE'schen Determinantensatz:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\sum \varepsilon \begin{vmatrix} a_{p_1,1} & \dots & a_{p_1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_m,1} & \dots & a_{p_m,m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{p_{m+1},m+1} & \dots & a_{p_{m+1},n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_n,m+1} & \dots & a_{p_n,n} \end{vmatrix}$$

worin $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem $\iota_{p_1} \dots \iota_{p_m}\, \iota_{p_{m+1}} \dots \iota_{p_n}$ eine aus $\iota_1 \dots \iota_n$ abgeleitete Permutation gerader oder ungerader Classe ist.

Ebenso leicht ergeben sich die anderen fundamentalen Determinantensätze: Ist

$$\alpha_1 = a_{1,1}\,\iota_1 + \dots + a_{n,1}\,\iota_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_n = a_{1,n}\,\iota_1 + \dots + a_{n,n}\,\iota_n$$

so ist:

$$\alpha_1 \dots \alpha_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \iota_1 \dots \iota_n .$$

Setzt man ferner:

$$\beta_1 = b_{1,1}\,\alpha_1 + \dots + b_{n,1}\,\alpha_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\beta_n = b_{1,n}\,\alpha_1 + \dots + b_{n,n}\,\alpha_n$$

so hat man, da auf $\alpha_1 \dots \alpha_n$ ganz dieselben Regeln wie auf $\iota_1 \dots \iota_n$ angewandt werden können:

$$\beta_1 \dots \beta_n = \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots b_{n,1} \\ \dots \\ b_{1,n} \dots b_{n,n} \end{vmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_n$$

also

$$\beta_1 \dots \beta_n = \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots b_{n,1} \\ \dots \\ b_{1,n} \dots b_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{n,1} \\ \dots \\ a_{1,n} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} \iota_1 \dots \iota_n$$

Die Substitution der α in die β aber liefert:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= c_{1,1}\,\iota_1 + \dots + c_{n,1}\,\iota_n \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_n &= c_{1,n}\,\iota_1 + \dots + c_{n,n}\,\iota_n \end{aligned}$$

wo allgemein

$$c_{m,k} = a_{m,1}\,b_{1,k} + a_{m,2}\,b_{2,k} + \dots + a_{m,n}\,b_{n,k}$$

Da nun

$$\beta_1 \dots \beta_n = \begin{vmatrix} c_{1,1} \dots c_{n,1} \\ \dots \\ c_{1,n} \dots c_{n,n} \end{vmatrix} \iota_1 \dots \iota_n$$

erhalten wird, so gibt die Vergleichung der beiden Werthe von $\beta_1 \dots \beta_n$:

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} \dots c_{n,1} \\ \dots \\ c_{1,n} \dots c_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots b_{n,1} \\ \dots \\ b_{1,n} \dots b_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{n,1} \\ \dots \\ a_{1,n} \dots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

den Satz von der Multiplication der Determinanten.

Nichts ist leichter, als mittels dieses Zahlensystemes die Elimination aus einem System linearer Gleichungen zu vollziehen. Seien:

$$\left.\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + \dots + a_{n,1}\,x_n &= b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{1,n}\,x_1 + \dots + a_{n,n}\,x_n &= b_n \end{aligned}\right\}$$

gegeben, so multiplicire man die Gleichungen der Reihe nach mit $\iota_1, \dots \iota_n$ und addire. Dann hat man

$$x_1\,\alpha_1 + \dots + x_n\,\alpha_n = \beta$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} a_{1,1}\,\iota_1 + \dots + a_{1,n}\,\iota_n &= \alpha_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1}\,\iota_1 + \dots + a_{n,n}\,\iota_n &= \alpha_n \end{aligned}\right\}$$

$$b_1\,\iota_1 + \dots + b_n\,\iota_n = \beta$$

$x_1\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots$ gesetzt wird. Durch Multiplication jener Gleichung z. B. mit $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ erhält man

$$x_1\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n = \beta\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

also

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & \ldots & a_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Diese wenigen Beispiele werden genügen, um die Eleganz und naturgemässe Leichtigkeit, mit welcher das alternirende Zahlensystem die Sätze der Determinantentheorie abzuleiten erlaubt, in helles Licht zu setzen.

§. 36.

Die Multiplication zweier Strecken.

Die Multiplication der complexen Zahlen, wie sie in vorstehenden §§. im Gebiete des Intellectuellen ausgeführt wurde, hat in der räumlichen wie in der mechanischen Anschauung ein vollkommen angemessenes Substrat. —

Unter dem Producte zweier Strecken $a \,.\, b$ verstehen wir den Flächeninhalt des von ihnen gebildeten Parallelogrammes in Bezug auf seine Grösse und die Lage seiner Ebene; d. h. wir setzen $a\, b = c\, d$, wenn das Parallelogramm, welches die Strecken a und b bilden, dem aus den Strecken $c \,.\, d$ gebildeten Parallelogramme nicht allein an Grösse gleich ist, sondern auch beide in parallelen Ebenen liegen, und einerlei Sinnes sind; und zwar setzen wir (Fig. 12), wenn $O\,A = a$, $A\,B = b$ gemacht wird,

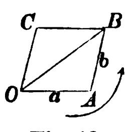


Fig. 12.

$$a\, b = O\,A \,.\, A\,B = 2 \,.\, O\,\grave{A}\,B$$

wo $O\,A\,B$ den Flächeninhalt des Dreiecks in dem durch die Folge der Buchstaben ausgedrückten Sinne bezeichnet.

Ein Parallelogramm, insofern es durch ein Streckenproduct dargestellt wird, kann in seiner Ebene gedreht, in eine parallele Ebene verlegt und in seiner Gestalt beliebig verändert werden, wenn nur dabei seine Grösse (mit Rücksicht auf seinen Sinn) nicht

geändert wird. Vertauscht man die Factoren eines Productes $a\,b$, so wird der Sinn des Parallelogrammes in den entgegengesetzten verändert; denn um $b\,a$ zu bilden, wird man (Fig. 12) $b = O\,C$, $a = C\,B$ setzen und daher $b\,a = O\,C\,.\,C\,B = 2\,.\,O\,C\,B$, so dass

$$a\,b = -\,b\,a;$$

dass ferner $a\,a = 0$, leuchtet sofort ein.

Man kann das Wesen eines Produktes $a\,b$ sehr anschaulich durch seine Axe, d. h. eine auf der positiven Seite seiner Ebene errichtete Strecke darstellen, welche eine dem Flächeninhalte desselben gleiche Länge hat. Dieselbe kann dann wie eine Strecke mit sich parallel im Raume verschoben werden, ohne dass sie aufhört, dasselbe Streckenproduct zu bezeichnen.

Unter der Summe zweier Parallelogramme versteht man das Parallelogramm, dessen Axe die geometrische Summe der Axen jener ist.

Es ist leicht nachzuweisen, dass jetzt das distributive Princip

$$a\,(b + c) = a\,b + a\,c$$

erfüllt ist. Um nämlich $a\,(b + c)$ zu bilden, wird man zunächst die Strecken a, b, c mit ihren Anfangspunkten zur Coincidenz bringen; dann ist $b + c = d$ die Diagonale des aus b, c construirten Parallelogrammes, die man mit a zu einem Parallelogramme zu vereinigen hat, um $a\,(b + c)$ zu finden. Um dasselbe in ein Rechteck zu verwandeln, projicire man b, c, d senkrecht auf eine durch ihren gemeinschaftlichen Anfang gehende, gegen a senkrechte Ebene, in b', c', d'; dann bleibt $d' = b' + c'$ und es ist das Parallelogramm $a\,d' = a\,d$, also $a\,(b + c) = a\,(b' + c')$, und da auch $a\,b' = a\,b$, $a\,c' = a\,c$, so hat man jetzt nur die Gleichung:

$$a\,(b' + c') = a\,b' + a\,c'$$

wo b', c' senkrecht gegen a stehen, nachzuweisen. Die Axen von $a\,b'$, $a\,c'$ stehen senkrecht auf diesen Ebenen und sind proportional den absoluten Werthen jener Strecken b', c'; die Diagonale des von diesen Axen gebildeten Parallelogrammes, also die Axe von $(a\,b' + a\,c')$, steht daher auch senkrecht gegen die Diagonale d', ist an Länge proportional der Länge von d', und ist somit die Axe von $a\,(b' + c')$; q. e. d.

Durch die Reduction der Addition von Streckenproducten auf die ihrer Axen ist die Commutativität und Associativität ohne weiteres erwiesen, und man kann daher mit Strecken und Streckenproducten ganz nach den allgemeinen formalen Regeln der Addition, Subtraction und Multiplication operiren.

Man sieht sofort, dass Streckenproducte genau die Eigenschaften der Kräftepaare (der „couples" Poinsot's) besitzen und dass (Fig. 13) unter ab ein Kräftepaar mit der Kraft AB an dem schiefen Hebelarme OA verstanden werden kann, wenn $a = OA$, $b = AB$ gesetzt wird. Kräftepaare können beliebig in parallele Ebenen verschoben, gedreht und in solche mit anderen Kräften und Hebelarmen verwandelt werden, wenn nur dabei das Product aus Hebelarm in die Intensität der Kraft constant bleibt. Letzteres, das Moment des Kräftepaares, wird durch das Parallelogramm $OABC$ bestimmt. Die mechanische Zusammensetzung von Kräftepaaren besteht in der geometrischen Addition der entsprechenden Parallelogramme.

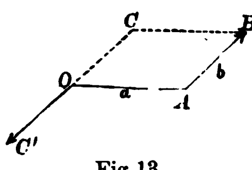


Fig. 13.

Jede Identität zwischen Streckenprodukten liefert so zugleich einen geometrischen und mechanischen Satz:

Man hat z. B. nach dem distributiven Principe:

$$(a - b)(b - c) = ab - ac - bb + bc$$

und da $bb = 0$

$$(a - b)(b - c) = ab + bc + ca$$

Ist $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, so ist

$$ab = OA . OB = - AO . OB = - 2 . AOB = 2 . OAB,$$

$$bc = 2 . OBC, \quad ca = 2 . OCA$$

und $\quad a - b = OA - OB = BA, \; b - c = OB - OC = CB,$

$$(a - b)(b - c) = BA . CB = + AB . BC = + 2 . ABC,$$

also: $\quad ABC = OAB + OBC + OCA$

so dass jene Identität den Satz liefert:

Die geometrische Summe dreier Flächen eines Tetraeders ist gleich der Grundfläche. Oder: Drei Kräftepaare, deren Momente durch die drei Seitenflächen eines Tetraeders dargestellt werden können, setzen sich zu einem Kräftepaar zusammen, dessen Moment der Grundfläche gleich ist.

Man beachte, dass die Dreiecksfläche ABC für einen sich auf die äussere Seite des Tetraeders stellenden Beobachter von entgegengesetztem Sinne als OAB, OBC, OCA ist, und man hat daher den Satz: die Summe der Flächen eines Tetraeders ist Null. Hieraus folgt ohne Weiteres der entsprechende Satz für ein irgend welches Polyeder, oder: Ein System

von Kräftepaaren, deren Momente durch die Flächen eines Polyeders dargestellt werden, und welche, wenn man alle Flächen von einerlei Seite betrachtet, in'sgesammt einerlei Sinn haben, ist im Gleichgewichte.

Die Strecken als Zahlen. Dass der hier auseinandergesetzte Begriff des Productes zweier Strecken a, b mit dem zusammenfällt, welcher den Zahlen des §. 34 zukommt, ist leicht zu zeigen, denn aus

$$a = \mathfrak{a}_1 i_1 + \mathfrak{a}_2 i_2 + \mathfrak{a}_3 i_3, \quad b = \mathfrak{b}_1 i_1 + \mathfrak{b}_2 i_2 + \mathfrak{b}_3 i_3$$

findet man nach den dortigen Bestimmungen:

$$ab = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1) i_1 i_2 + (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_2) i_2 i_3 + (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_3) i_3 i_1$$

Die Coefficienten der Einheitsproducte stellen die Projectionen des aus a, b gebildeten Parallelogrammes auf das rechtwinklige Coordinatensystem $i_1 i_2$, $i_2 i_3$, $i_3 i_1$ vor. Zwei Producte ab und cd sind dann einander gleich, wenn diese Projectionen gleich sind; dann aber sind in der That die oben für die Gleichheit zweier Streckenproducte gegebenen Bedingungen erfüllt.

§. 37.

Die Multiplication dreier Strecken.

Unter dem Producte dreier Strecken $a.b.c$ verstehen wir das Parallelepipedum, welches aus diesen drei aneinandergelegten Strecken gebildet wird, seiner Grösse nach, d. h. wir setzen $abc = def$, wenn die beiden Parallelepipeda an absoluter Grösse und dem Zeichen (dem Sinne) nach einander gleich sind, indem dabei ihre Gestalt und ihr Ort im Raume ausser Betracht kommt. — Man wird hienach, um abc zu erhalten,

$$a = OA, \; b = AB, \; c = BC$$

und dann

$$abc = OA.AB.BC = 6.OABC$$

setzen, wo $OABC$ das Tetraeder bezeichnet, seinem Inhalte und seinem Sinne nach.

Dass man dann unter der Summe solcher Parallepipeda die Summe ihrer Volumina, mit demselben oder entgegengesetzten

Zeichen, je nachdem sie einerlei oder entgegengesetzten Sinnes sind, in gewöhnlicher Weise zu verstehen habe, und daher die Commutativität und Associativität erfüllt ist, bedarf keiner Erläuterung.

Aus den bekannten Sätzen über das Zeichen des Inhaltes eines Tetraeders geht sofort hervor, dass $a \cdot b \cdot c$ sein Zeichen wechselt, wenn zwei benachbarte Factoren ihre Plätze wechseln, also

$$+ abc = + bca = + cab = - acb = - bac = - cba$$

Ferner verschwindet das Product, wenn zwei seiner Factoren einander gleich werden.

Dass das associative Princip $a(bc) = (ab)c$ erfüllt ist, liegt auf der Hand, und es bleibt nur noch das distributive Princip zu erweisen. Man hat

$$ab(c + d) = abc + ab'd; \qquad (1)$$

denn man denke sich der Einfachheit wegen ab in ein Rechteck verwandelt, und überdem die Strecken so verschoben, dass a, b, c, d einen gemeinschaftlichen Anfangspunct haben; dann hat das Parallelepipedum $ab(c + d)$ als Grundfläche ab, als Höhe aber die Projection von $(c + d)$ auf ein, auf ab errichtetes Perpendikel. Da die Projection von $(c + d)$ aber gleich ist der arithmetischen Summe der Projectionen von c und d auf jenes Perpendikel, so ist in der That $abc + abd$ gleich dem einen Parallelepipedum $ab(c + d)$.

Was den anderen Fall des distributiven Principes betrifft, welcher das Product $a(bc + de)$ entwickelt, so kann dieser leicht auf den vorstehenden zurückgeführt werden, indem man mit f eine Strecke der Durchschnittslinie der beiden Ebenen bc, de bezeichnet, und $bc = fg$, $de = fh$ macht. Dann ist $bc + de = fg + fh = f(g + h)$ und $a(bc + de) = af(g + h)$, dies ist aber nach (1) $= afg + afh = abc + ade$, also

$$a(bc + de) = abc + ade \qquad (2)$$

Damit ist die Zulässigkeit dieses Begriffes des Productes dreier Strecken durch die Erfüllung aller formalen Verknüpfungsgesetze dargethan.

Das Product von 4 Strecken hat keine geometrische Bedeutung und kann durchaus der Null gleich gesetzt werden.

So haben wir ein System alternirender Operationen mit Strecken gewonnen, welches überall nach dem Principe der Permanenz der arithmetischen Gesetze gebildet ist, soweit dies die Rücksicht auf die Lage der Strecken möglich machte. Es darf dieses System als die consequente Umgestaltung des der Euklidischen Geometrie eigenthümlichen angesehen werden, insofern eben auch in letzterem das Product zweier Strecken einen Flächenraum, das dreier einen körperlichen Raum, das von vieren aber kein geometrisches Gebilde bedeutet.

An Anwendungen hat die Interpretation des Productes dreier Strecken keinen Mangel. Es mag hier nur eines Satzes beispielsweise gedacht werden. Setzt man:

$$ab = cd + ef + gh + \dots$$

so ist ab das aus cd, ef, $gh, \dots$ resultirende Kräftepaar. Man denke sich die Ebenen der Kräftepaare sämmtlich durch einen Punkt O gelegt, von dem aus man die beliebige Strecke $OX = x$ ziehe. Die Identität:

$$abx = cdx + efx + ghx + \dots$$

gibt nun den schönen Satz:

Bei einem Systeme von Kräftepaaren im Raume, deren Ebenen sich in Einem Punkte O schneiden, ist die Summe der Pyramiden, welche irgend einen Punkt X zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Grundflächen in den Ebenen der Kräftepaare ihren Momenten proportional sind, gleich einer Pyramide mit derselben Spitze und einer Grundfläche, die in der durch O gelegten Ebene des resultirenden Paares enthalten und dessen Momente proportional ist.

Die Strecken als Zahlen. In dem Zahlensysteme des §. 34 wird das Product der drei Strecken (vergl. §. 32)

$$a = \mathfrak{a}_1 \dot{i}_1 + \mathfrak{a}_2 \dot{i}_2 + \mathfrak{a}_3 \dot{i}_3$$
$$b = \mathfrak{b}_1 \dot{i}_1 + \mathfrak{b}_2 \dot{i}_2 + \mathfrak{b}_3 \dot{i}_3$$
$$c = \mathfrak{c}_1 \dot{i}_1 + \mathfrak{c}_2 \dot{i}_2 + \mathfrak{c}_3 \dot{i}_3$$

durch die Determinante:

$$abc = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 \end{vmatrix} \dot{i}_1 \dot{i}_2 \dot{i}_3$$

ausgedrückt, welche nach bekannten Sätzen den sechsfachen Inhalt des von jenen drei Strecken gebildeten Tetraeders darstellt. — Das Product von vier Strecken ist jederzeit Null.

Unsere obigen Propositionen stimmen hiernach genau mit den früher festgesetzten Eigenschaften jenes alternirenden Zahlensystemes überein; man kann letzteres daher als eine systematische Nomenclatur für die Punkte im Raume ansehen und die geometrischen Verknüpfungen durch algebraische ersetzen. Umgekehrt liefern die geometrischen Operationen ein anschauliches Substrat für die intellectuellen oder formalen Operationen des Zahlensystemes.

§. 38.

Product zweier Punkte.

Der in §. 33 gelehrten Addition mehrfacher oder einfacher Punkte entspricht folgende Multiplication: Unter dem Producte $A \,.\, B$ zweier einfachen Punkte verstehen wir das Geradenstück AB nach seiner Länge und insofern es der Geraden AB angehört, d. h. wir werden zwei Producte AB und CD dann und nur dann als gleich ansehen, wenn sie gleich lang sind und gleichen Sinnes auf einer Geraden liegen.

Ein solches Product AB unterscheidet sich wesentlich von einer Strecke, welche mit sich selbst parallel verschoben werden kann; wir werden zum Unterschiede ein solches, nur in seiner Geraden verschiebbare Stück AB ein Geradenstück nennen und müssen uns in den folgenden Untersuchungen hüten, die Bezeichnung eines solchen Geradenstückes mit der einer Strecke zu verwechseln. Wenn die Geradenstücke $AB = CD$, so sind auch die Strecken $B - A = D - C$ einander gleich, nicht aber umgekehrt; denn letztere Gleichung ist schon erfüllt, wenn die Strecken nur parallel und gleich sind; erstere verlangt ausserdem noch, dass sie auf einer und derselben Geraden liegen.

Der Definition nach gelten die Gleichungen

$$AB = -BA, \quad AA = 0.$$

Das Product zweier mehrfachen Punkte setzen wir

$$\mathfrak{a}A \,.\, \mathfrak{b}B = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \,.\, AB.$$

Ein Geradenstück kann als Repräsentant einer statischen Kraft betrachtet werden, die ihrem Begriffe nach einer anderen äquivalent ist, wenn beide auf derselben Geraden liegen und an Intensität gleich sind.

Die Summe zweier Stücke AB und CD (Fig. 14) von Geraden, welche sich in einem Punkte O schneiden, wird

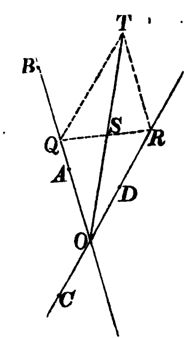


Fig. 14.

erhalten, wenn man beide Stücke nach O verschiebt, so dass $AB = OQ$, $CD = OR$. Dann versteht man unter der Summe $OQ + OR$ die Diagonale OT des aus OQ, OR gebildeten Parallelogrammes.

Hiemit ist dann sofort das distributive Princip

$$O(Q + R) = OQ + OR$$

erfüllt; denn es ist $Q + R = 2S$, wo S der Mittelpunkt von QR; dann aber hat man $O(Q + R) = O \,.\, 2S = 2 \,.\, OS = OT$, und man sieht, mit welcher Leichtigkeit man umgekehrt aus der Permanenz des distributiven Principes jenen Summenbegriff für Stücke von Geraden, die in einer Ebene liegen, hätte ableiten können. Dass derselbe übrigens associativ und commutativ ist, bedarf keiner Erläuterung.

Die Resultante zweier in einer Ebene liegenden Kräfte ist der Summe der Geradenstücke gleich, durch welche die einzelnen Kräfte dargestellt werden.

Das Product eines Punktes O und einer Strecke $b = AB$ ist geometrisch leicht darzustellen, wenn man letztere parallel mit sich so verschiebt, dass (Fig. 15) $b = B - A = B' - O$, wo dann $Ob = O(B' - O) = OB' - OO = OB'$ ist.

Das Product zweier Punkte AB kann noch in eigenthümlicher Weise durch eine Summe eines durch einen beliebigen Punkt O gehenden Geradenstückes und eines Streckenproductes dargestellt werden. Zieht man nämlich (Fig. 15) durch O die Parallele OB' mit AB, so dass $B' - O = B - A$, so hat man aus der Identität

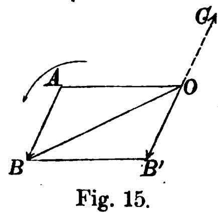


Fig. 15.

$$AB = (B - A)(O - B) - (B - A)O$$

die Gleichung

$$AB = (B' - O)(O - B) - (B' - O)O$$

oder

$$AB = OB' + (B' - O)(O - B).$$

Hierin ist $(B' - O)(O - B)$ das Product der beiden Strecken

$OB'.BO = -BO.OB' = -2.BOB' = 2.BB'O$, also dem Flächeninhalte des Parallelogrammes $ABB'O$ gleich.

Mechanisch heisst dies: Eine Kraft AB ist äquivalent einer ihr an Intensität gleichen und parallelen durch irgend einen Punkt O gehenden Kraft OB' und einem aus den Kräften AB, OC und dem (schiefen) Arme OA gebildeten Kräftepaare, welches in dem Sinne $ABB'O$ dreht.

Addition von Geradenstücken im Allgemeinen. Nichts ist leichter als mit Hilfe dieses Satzes die allgemeine Addition beliebiger Stücken von Geraden, die irgendwie im Raume liegen, auszuführen. Man ersetze jedes Geradenstück durch eine solche Summe, so liefert deren Addition eine Summe von Parallelogrammen und eine Summe von, durch Einen Punkt O gehenden Geradenstücken, welche beiden Summen nach unseren früheren Regeln wiederum in ein einziges Parallelogramm und ein einziges Geradenstück vereinigt werden können, welches im Allgemeinen dem Parallelogramme nicht parallel ist.

Es versteht sich, dass sich die Summe eines Geradenstückes und eines Parallelogrammes auch wieder, und zwar auf unendlich mannigfaltige Weise, in die Summe zweier Geradenstücke zerlegen lässt.

Dass die hier gelehrte Addition von irgend welchen Geradenstücken commutativ und associativ ist, geht aus den entsprechenden Eigenschaften der Addition von sich schneidenden Geradenstücken und andererseits von Streckenproducten hervor.

Eine Anzahl von irgend welchen Kräften kann stets durch eine einzige in einem beliebigen Punkte angreifende Kraft und ein Kräftepaar ersetzt werden; oder auch durch zwei, auf unendlich verschiedene Weise anzubringende Kräfte.

In speciellen Fällen kann sich jene Summe auf ein Geradenstück allein oder ein Streckenproduct allein reduciren.

Hat man $AB + CD$ zu bilden, so mache man

$$B - A = B' - O,\quad D - C = D' - O$$

so hat man

$$AB = OB' + (B' - O)(O - B),\quad CD = OD' + (D' - O)(O - D)$$

also

$$AB + CD = OB' + OD' + \{(B' - O)(O - B) + (D' - O)(O - D)\}$$

Ist nun AB parallel CD, so kann man die beiden auf einer Geraden c liegenden Strecken $B' - O = \mathfrak{b}\, c$, $D' - O = \mathfrak{d}\, c$ setzen, wo $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ reelle Zahlen sind. Bestimmt man nun O aus

$$\mathfrak{b}(O - B) + \mathfrak{d}(O - D) = 0,\quad O = \frac{\mathfrak{b}B + \mathfrak{d}D}{\mathfrak{b} + \mathfrak{d}}$$

so hat man:

$$AB + CD = OB' + OD'$$

d. h. mechanisch: die Resultante zweier parallelen Kräfte ist im Allgemeinen gleich einer parallelen Kraft, welche deren arithmetische Summe darstellt und welche von den Kräften im umgekehrten Verhältnisse ihrer Intensität absteht.

Sind AB, CD entgegengesetzt gerichtete, gleiche Stücke, so ist $B' - O = -(D' - O)$ also:

$$AB + CD = (D' - O)(B - D) = (D - C)(B - D)$$

d. h. dem doppelten Dreiecke CDB gleich.

Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte haben somit keine Resultante, sondern bilden ein Kräftepaar. —

Jede Identität zwischen Producten von Punkten gibt hienach einen geometrischen und mechanischen Satz. So hat man:

$$AB + BC + CA = (A - B)(A - C)$$

und da $(A - B)(A - C)$ dem Producte der Strecken $BA \,.\, CA = CA \,.\, AB$ also $= 2 \,.\, CAB = 2 \,.\, ABC$, so hat man den Satz: die Summe der in einerlei Sinn genommenen Seiten eines Dreiecks ist seiner doppelten Fläche gleich. Es ist zu beachten, dass hier die Seiten eines Dreiecks nicht als Strecken, also mit sich parallel verschiebbar anzusehen sind. Denn in diesem Falle ist nach §. 20 die Summe der Seiten Null. Uebrigens mag vorstehender Satz noch in die Form gebracht werden: Kräfte, welche durch die Seiten eines geschlossenen ebenen Polygons der Reihe nach dargestellt werden, haben als Resultante ein Kräftepaar, dessen Moment der Fläche des Polygons gleich ist.

§. 39.

Product von drei Punkten.

Unter dem Producte dreier Punkte ABC verstehen wir ein Ebenenstück, nämlich den doppelten Flächeninhalt des von ihnen gebildeten Dreiecks, seiner Grösse und seiner Ebene nach, d. h. wir setzen das Product ABC

$= D\,E\,F$ dann und nur dann, wenn das Dreieck $A\,B\,C$ mit $D\,E\,F$ in einer Ebene liegt, ihm gleich von Fläche und einerlei Sinnes ist.

Es ist das Produkt der Strecken

$$(B-A)(C-B) = (E-D)(F-E), \qquad (1)$$

wenn das Product der Punkte

$$A\,B\,C = D\,E\,F; \qquad (2)$$

aber es folgt nicht umgekehrt die Gleichung (2) aus (1), und wir werden ein Product dreier Punkte $A\,B\,C$, ein Ebenenstück, das in seiner Ebene (aber nicht parallel zu dieser) beliebig verschoben und bei constanter Grösse in seiner Gestalt verändert werden kann, wohl zu unterscheiden haben von dem Producte zweier Strecken $(B-A)(C-B)$, welch letzteres allerdings eben jenen Flächenraum darstellt, aber ohne Rücksicht auf die bestimmte Ebene, welcher er angehört; denn ein Streckenproduct kann im Raume parallel mit sich bewegt werden, ohne seinen Werth zu ändern.

Ein Product $A\,B\,C$ nimmt bei der Vertauschung zweier Punkte mit einander den entgegengesetzten Werth an; es verschwindet ferner, wenn zwei Punkte desselben in einer Geraden liegen. Dass das Product $A\,B\,C$ associativ, also $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$ ist, folgt unmittelbar aus seinem Begriffe. Unter dem Producte dreier mehrfachen Punkte $\mathfrak{a}\,A$, $\mathfrak{b}\,B$, $\mathfrak{c}\,C$ verstehen wir das $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ mal genommene Ebenenstück $A\,B\,C$.

Mechanisch repräsentirt $A\,.\,B\,C$ das Moment einer durch das Geradenstück $B\,C$ dargestellten Kraft in Bezug auf den Punkt A.

Die geometrische Addition von Ebenenstücken wird ganz analog durchgeführt als die von Parallelogrammen nach §. 36, und ebenso auch die Gültigkeit des distributiven Principes:

$$A\,B\,(C+D) = A\,B\,C + A\,B\,D$$

nachgewiesen werden können; der Kürze halber wollen wir dies nicht wieder in extenso erläutern.

Was das Product von Punkten in Strecken sei, ist leicht zu sehen. Hat man $A\,B\,c$ zu bilden, so mache man $c = C - B$, so dass $A\,B\,c = A\,B\,(C-B) = A\,B\,C - A\,B\,B = A\,B\,C$. Ist $A\,b\,c$, so mache man $b = B - A$, $c = C - B$ und hat dann $A\,b\,c = A\,(B-A)\,(C-B) = A\,(B\,C - A\,C - B\,B + A\,B) = A\,(B\,C - A\,C + A\,B) = A\,B\,C - A\,A\,C + A\,A\,B = A\,B\,C$.

Jede algebraische Identität zwischen Producten dreier Punkte liefert einen Satz, der ebensowohl für Flächen von Dreiecken, als für Momente von Kräften ausgesprochen werden kann.

Jede Gleichung zwischen Producten von Paaren von Punkten kann durch Multiplication mit einem beliebigen Punkte O zu einer Gleichung zwischen den Flächen von Dreiecken gemacht werden. Ist z. B.

$$MA + MB = MC,$$

so hat man ohne weiteres

$$OMA + OMB = OMC.$$

Liegt das ganze System $OMABC$ nicht in einer Ebene, so ist die geometrische Summe der Ebenenstücke zu bilden; liegt aber ein beliebiger Punkt O in der Ebene eines Parallelogrammes $ACBM$, so ist der Flächeninhalt des über der Diagonale MC beschriebenen Dreiecks OMC die arithmetische Summe der über den Seiten MA und MB beschriebenen Dreiecke OMA, OMB; und so findet Varignon's berühmter Lehrsatz, dessen mechanische Bedeutung bekannt ist, seinen adäquaten Ausdruck in dieser Theorie.

Um noch ein Beispiel beizubringen: da das Product von 3 Strecken in einer Ebene nach §. 37 verschwindet, so ist

$$(M-A)(M-B)(M-C) = 0,$$

wenn M in der Ebene ABC liegt. Wird dies Product nach dem distributiven Princip zerlegt und darauf geachtet, dass ein Product dreier Punkte Null ist, wenn zwei derselben zusammenfallen, so hat man:

$$ABC = MAB + MBC + MCA$$

einen bekannten geometrischen Satz.

§. 40.

Product von vier Punkten.

Unter einem Producte von vier Punkten $ABCD$ versteht man das an diesen Punkten gebildete Parallelepipedum, seinem Inhalte und seinem Sinne nach, ein Raumstück. Es sind zwei solche gleich anzunehmen, wenn ihre Inhalte gleich und gleichen Sinnes sind, wie sie auch gestaltet sein oder liegen mögen, so dass:

$$ABCD = EFGH$$

gesetzt wird, wenn:

$$(B-A)(C-B)(D-C) = (F-E)(G-F)(H-G);$$

und umgekehrt. Um über den Sinn der Parallelogramme zu entscheiden, wird man sie als die sechsfachen Volumina der Tetraeder

$A\,B\,C\,D$ betrachten; zwei Tetraeder $A\,B\,C\,D$ und $A\,B\,C\,E$ sind aber einerlei oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem D und E auf derselben Seite in Bezug auf die Ebene $A\,B\,C$ liegen, oder nicht. Dann sieht man sofort, dass $A\,B\,C\,D$ sein Zeichen bei jeder Permutation zweier Factoren wechselt.

Die Summe zweier Raumstücke ist ein Raumstück, dessen Inhalt die arithmetische Summe der Volumina der zu addirenden Raumstücke. Das commutative und associative Princip ist bei dieser Addition und wie man durch ein dem §. 37 entsprechendes Raisonnement findet, das distributive Princip bei der Multiplication von vier Punkten erfüllt, und somit der Name des Productes für $A\,B\,C\,D$ angemessen, da die Associativität desselben aus der Definition hervorgeht: denn man kann $A\,B\,C\,D$ ebensowohl als Product des Punktes A in das Ebenenstück $B\,C\,D$, d. h. als sechsfachen Inhalt des Tetraeders mit der Spitze A und der Grundfläche $B\,C\,D$, wie auch als Product eines Ebenenstückes $A\,B\,C$ in den Punkt D, und endlich auch als Product der beiden Geradenstücke $A\,B\,.\,C\,D$, d. h. als sechsfachen Inhalt des Tetraeders ansehen, dessen gegenüberliegende Kanten $A\,B$, $C\,D$ sind.

Unter dem Product eines Punktes A in 3 Strecken $a\,b\,c$ hat man nichts weiter als das Raumstück, welches dem Parallelepipedum $a\,b\,c$ gleich ist, zu verstehen, denn setzt man $a = B - A$, $b = C - B$, $c = D - C$, so hat man

$$A\,a\,b\,c = A\,(B - A)\,(C - B)\,(D - C) = A\,B\,C\,D.$$

Anwendungen dieses Productbegriffes lassen sich so zahlreich machen, dass ich hier nur einige wenige hervorheben kann. Aus der Identität z. B.

$$(A - D)\,(B - D)\,(C - D) = A\,B\,C - B\,C\,D + C\,D\,A - D\,A\,B$$

findet man durch Multiplication mit O:

$$O\,(A - D)\,(B - D)\,(C - D) = O\,A\,B\,C - O\,B\,C\,D + O\,C\,D\,A - O\,D\,A\,B$$

Darin stellt aber die linke Seite nichts anderes dar, als das sechsfache negative Volumen des Tetraeders $A\,B\,C\,D$ und man hat daher den Satz:

Die arithmetische Summe der Volume derjenigen Tetraeder, welche über den Flächen eines Tetraeders $A\,B\,C\,D$ als Grundflächen und an einer gemeinschaftlichen Spitze O construirt werden, ist, wo auch O liege, constant dem Volumen des Tetraeders $A\,B\,C\,D$ gleich.

Ist
$$AE = AB + AC + AD,$$
also AE die Diagonale eines Parallelepipedum, dessen drei Kanten AB, AC, AD sind, so erhält man durch Multiplication mit MN die Gleichung zwischen den Raumstücken
$$MNAE = MNAB + MNAC + MNAD,$$
welche das Correlat des Satzes von VARIGNON für den Raum ist.

Das Product $MN.AB$ heisst, wenn AB eine Kraft ihrer Intensität, Richtung und Lage nach vorstellt, das **Moment** derselben **in Bezug auf die Axe** MN. Ist die geometrische Summe der Geradenstücke:
$$AB + CD + EF + \ldots = 0,$$
so ist auch
$$MN.AB + MN.CD + MN.EF + \ldots = 0$$
d. h. **Halten sich eine Anzahl von Kräften das Gleichgewicht, so ist die Summe der Momente in Bezug auf irgend eine Axe gleich Null.**

Wir haben in §. 38 gesehen, dass eine Summe von Kräften im Raume auf unendlich viele Weisen durch zwei Kräfte AB, CD ersetzt werden kann, deren geometrische Summe $(AB + CD)$, wie sie auch gewählt sein mögen, constant, nehmlich der Summe jener Kräfte gleich ist. Aus $AB + CD = \text{const.}$ folgt aber $(AB + CD)(AB + CD) = \text{const.}$, also $AB.AB + CD.AB + AB.CD + CD.CD = CD.AB + AB.CD = 2.ABCD = \text{const.}$, da $CDAB$ durch eine gerade Anzahl von Permutationen der Factoren aus $ABCD$ erhalten werden kann. Beachtet man nun, dass $AB.CD$ das sechsfache eines Tetraedervolums ist, dessen gegenüberliegende Kanten AB, CD sind, so gelangt man zu dem berühmten Theoreme von CHASLES:

Wie man auch ein System von beliebigen Kräften durch zwei ersetzen mag, immer bleibt das Volumen des Tetraeders, welches dieselben zu Kanten hat, constant.

Ein Product von fünf Punkten kann man unbedingt der Null gleich setzen.

§. 41.

Reduction der alternirenden Operationen an Punkten auf die an Zahlen.

Wir haben in den §§. 38, 39, 40 an und mit Punkten auf rein geometrische Weise ein System von Operationen begründet, welches die Eigenthümlichkeit besitzt, dass das Resultat derselben jedesmal das entgegengesetzte Zeichen annimmt, wenn zwei der zu verknüpfenden Punkte ihren Platz wechseln, und welches wir daher ein **alternirendes** nennen können.

Stellen wir jeden Punkt als lineare Function von vier festen Fundamentalpunkten nach §. 33 dar:

$$\mathfrak{m}\, M = \mathfrak{m}_1\, I_1 + \mathfrak{m}_2\, I_2 + \mathfrak{m}_3\, I_3 + \mathfrak{m}_4\, I_4$$

und nehmen hinzu, dass jetzt vermöge §. 38 die Gleichungen

$$I_1\, I_1 = 0,\ I_1\, I_2 = -\ I_2\, I_1, \ldots$$

bestehen, dass ferner das distributive und associative Princip allgemein, also auch für jene lineare Function M der 4 Punkte $I_1\, I_2\, I_3\, I_4$ erfüllt ist, so geht hieraus hervor, dass das in §. 34 behandelte Zahlensystem für $n = 4$ zur Bezeichnung der Punkte im Raume angewandt werden muss, wenn man die alternirenden geometrischen Operationen durch solche an Zahlen ersetzen will.

Betrachten wir nur Punkte einer Ebene $I_1\, I_2\, I_3$, so wird man eden solchen Punkt M durch die Dreipunktcoordinaten $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ darstellen:

$$\mathfrak{m}\, M = \mathfrak{m}_1\, I_1 + \mathfrak{m}_2\, I_2 + \mathfrak{m}_3\, I_3$$

wo, wenn der Punkt ein einfacher sein soll,

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 = 1$$

zu setzen ist.

Das zwischen drei Punkten A, B, C liegende Dreieck z. B. wird, wenn

$$A = \mathfrak{a}_1\, I_1 + \mathfrak{a}_2\, I_2 + \mathfrak{a}_3\, I_3$$
$$B = \mathfrak{b}_1\, I_1 + \mathfrak{b}_2\, I_2 + \mathfrak{b}_3\, I_3$$
$$C = \mathfrak{c}_1\, I_1 + \mathfrak{c}_2\, I_2 + \mathfrak{c}_3\, I_3$$

gesetzt wird, durch

$$2\,.\,A\,B\,C = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 \end{vmatrix}$$

dargestellt.

Die analytische Geometrie stellt die geometrischen Objecte durch Coordinaten dar, indem sie die eigentlich gegebenen relativen Beziehungen der Objecte durch Beziehungen auf andere, ausserhalb gelegene Objecte (die Coordinatenaxen) ersetzt; sie wendet dann auf diese Coordinaten Operationen an, welche erst nachträglich geometrisch gedeutet werden. In der vorstehends gelehrten Weise aber werden vielmehr die Objecte an sich selbst betrachtet und solchen Operationen unterzogen, welche die neuen geometrischen oder mechanischen Gebilde selbst auf die naturgemässeste Weise erzeugen.

Betrachtet man mit Aufmerksamkeit die Form der Relationen von Strecken, von Dreiecksflächen, von Tetraedervolumen, von Kräften, Kräftepaaren und ihren Momenten, wie sie bei consequenter Anwendung seiner Bezeichnung von Möbius in seinem „Lehrbuche der Statik" (I. Th. 1837) gegeben sind, so kann es Niemandem entgehen, dass zwischen den Formeln eine eigenthümliche Beziehung besteht, welche dem Zusammenhange algebraisch aus einander abgeleiteter Formeln entspricht. Diese Beziehung ist nun in vorstehender Darstellung zu voller Klarheit erhoben worden, indem wir zeigten, dass man der natürlichen formalen Bezeichnung der Strecken AB, Dreiecksflächen ABC, Tetraedervolume $ABCD$, eine tiefere Bedeutung unterlegen kann, die sie als Producte von Punkten erscheinen lässt, so dass jede Gleichung zwischen geometrischen Grössen, wie sie nach Möbius'scher Art ausgesprochen werden kann, eine algebraische Identität zwischen den Producten von Punkten und umgekehrt jede letztere einen geometrischen oder mechanischen Satz liefert. Um zu zeigen, wie ungemein dadurch die Auffassung erleichtert wird, habe ich im vorstehenden anmerkungsweise sämmtliche Hauptsätze, welche sich in den ersten 5 Kapiteln der citirten Statik befinden, angeführt; muss aber darauf verzichten, hier die fundamentale Bedeutung dieses alternirenden Operationssystems, namentlich für die Mechanik, in extenso darzuthun, und zu zeigen, wie sich vorstehende Verknüpfungen von Punkten überall in der Mechanik als der naturgemässe Ausdruck ihrer Beziehungen darbieten.

Die Methode, mit den Grössen in unserem Sinne zu operiren, vereinigt die Vortheile der sogenannten synthetischen Darstellung, welche überall die Objecte selbst in Betracht zieht, und deren gegenseitige Relationen aus ihrer Anschauung selbst entwickelt, mit denen der sogenannten analytischen Methode d. h. des Calculs, der durch formale Operationen und nach bestimmten Regeln die Objecte mit einander verknüpft, ohne bei seiner Anwendung einer fortwährenden Anschauung des Verknüpften zu bedürfen. Sie verwirklicht den genialen Gedanken einer geometrischen Charakteristik und einer Geometrie der Lage, wie ihn Leibniz in kühnen Strichen skizzirt hat: „Je ne suis pas encor content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algebre magnitudinem" (Brief von 1679 an Huygens, in Uylenbroek, Chr. Hugenii exercit. math. Fasc. I. S. 9). „L'Algebre n'est autre chose que la characteristique des nombres indeterminés, ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvement, d'où vient qu'il est souvent difficile de reduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions géometriques assez commodes lors meme que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle characteristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en meme temps la solution et la construction et la demonstration géometrique, le tout d'une maniere

naturelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes determinées..... Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la geometrie." (a. a. O. Fasc. II. S. 6).

Historisches zum VII. Abschnitt. Schon in der „Ausdehnungslehre" Grassmann's von 1844 findet sich das System der alternirenden Zahlen und Operationen, allerdings in einer sehr abstracten und schwer verständlichen Darstellung. Im September 1845 hat Saint-Venant (Comptes rendus, Bd. 21. S. 620) die geometrische Multiplication der Strecken unabhängig von Grassmann vorgetragen. Im Jahre 1853 trat Cauchy (Comptes rendus. Bd. 36. S. 70, 129, 161, und in zusammenhängender Darstellung in den Exercices d'analyse et d. phys. math. Bd. IV. S. 356) mit seinen „clefs algébriques oder anastrophiques" hervor, welche genau mit Grassmann's alternirenden Einheiten zusammenfallen (s. Ausdehnungslehre von 1862. S. IX). Kurz nach der ersten Aufstellung des vorstehenden Productbegriffs hat in England O'Brien (Philosoph. Magaz. August 1847. S. 139) denselben ebenfalls entwickelt und für die Mechanik verwendet. Von seinen zahlreichen späteren Publicationen, meist sehr geringen Umfanges, erwähne ich eine zusammenfassende Darstellung „On Symbolic Forms derived from the conception of the translation of a directed magnitude" (Phil. Trans. for the year 1852. Bd. 142. S. 161).

An Gründlichkeit und Angemessenheit des Gedankens und der Entwickelung stehen aber alle diese Arbeiten gegen Grassmann's, namentlich gegen seine Darstellung in der „Ausdehnungslehre" von 1862 weit zurück. In dieser wird ein Product, wie es in diesem Abschnitte behandelt ist, ein „kombinatorisches" und „äusseres" genannt. Es würde zu weit führen, wollten wir hier alle die verschiedenen Productbildungen, welche Grassmann untersucht hat, die äussere, innere, progressive, regressive, die auf ein Hauptgebiet bezügliche, die planimetrische, stereometrische u. s. w. Multiplication darstellen. Sie alle beziehen sich auf alternirende Zahlen, welche aber nach anderen Gesetzen miteinander verknüpft werden, so dass der Productbegriff in der von uns in §. 34 statuirten Weise hier nicht mehr stattfinden würde. Ich zweifele, dass diese abnormen Multiplicationen in den Zahlen ihre naturgemässe Repräsentation finden, vielmehr scheint mir es weit vorzüglicher, ihren Begriff rein geometrisch zu entwickeln, wie dies Grassmann in seiner „Geometrischen Analyse" (Leipzig 1847) in's Besondere für das „innere Product" ausgeführt hat. Ich bemerke hier nur, dass während das „äussere Product" zweier Strecken $a\, b$, also das in §. 36 behandelte, seinem numerischen Werthe nach $\mathfrak{a}\, \mathfrak{b} \sin(a\, b)$ ist, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ die absoluten Längen der beiden Strecken bezeichnen, ihr „inneres Product" durch $\mathfrak{a}\, \mathfrak{b} \cos(a\, b)$ dargestellt wird. Ausser O'Brien, welcher a. a. O. dasselbe anwendet, hat auch Gauss sich mit ihm einmal beschäftigt (s. Werke II. Bd. Nachlass S. 305).

ACHTER ABSCHNITT.

Reine Theorie der Quaternionen.

---

§. 42.

Definition der Quaternionen; ihre Multiplication.

Unter einer Quaternion*) versteht man eine aus der numerischen Einheit und 3 complexen Einheiten $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ mit reellen oder gemeinen complexen Elementen x_0, x_1, x_2, x_3 gebildete Zahl**)

$$\xi = x_0 + x_1 \iota_1 + x_2 \iota_2 + x_3 \iota_3,$$

wenn die allgemeinen Verknüpfungsgesetze des §. 28 auf sie anwendbar sind und die Bestimmungsgleichungen

---

*) Ich weiss wohl, dass quaternio eigentlich generis masculini ist: entsprechend dem Sprachgebrauche (die Union, die Million u. s. w.) aber bediene ich mich, um Härten zu vermeiden, im Deutschen des Femininum.

**) Sir R. W. HAMILTON nennt ξ nur dann eine Quaternion, wenn die Elemente reelle Zahlen, und eine Biquaternion, wenn die Elemente gemeine Complexe sind. Während letztere, die einer eigentlichen geometrischen Darstellung nicht fähig sind, und daher in unserem Sinne (s. S. 7) als transscendente oder rein formale bezeichnet werden können, in HAMILTON's geometrischer Auffassung erst sehr spät und immer nur gelegentlich, etwa so wie die gewöhnlichen complexen Grössen in der analytischen Geometrie als Durchgangspunkte, auftreten, so konnten und mussten in meinem Entwickelungsgange die Quaternionen sogleich in dieser Allgemeinheit aufgefasst werden; so dass ich auch den Namen in dem obigen allgemeinen Sinne ohne Schaden anwenden kann.

Die 3 imaginären Einheiten nennt HAMILTON i, j, k, welche Bezeichnung ich mit $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ vertauscht habe, um durch das griechische Alphabet in übersichtlicher Weise im Allgemeinen Quaternionen bezeichnen zu können.

$$\iota_1 \iota_1 = -1, \quad \iota_2 \iota_2 = -1, \quad \iota_3 \iota_3 = -1$$
$$\iota_1 \iota_2 = \iota_3$$

zur weiteren Charakterisirung dienen.

Insofern auf die Einheiten das associative Gesetz anwendbar ist, hat man aus $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$ durch Multiplication $\iota_1 \iota_1 \iota_2 = \iota_1 \iota_3$; da aber $\iota_1 \iota_1 \iota_2 = -\iota_2$ ist:

$$\iota_1 \iota_3 = -\iota_2.$$

Ferner folgt $\iota_1 \iota_2 \iota_2 = \iota_3 \iota_2$ aus derselben Gleichung, also

$$\iota_3 \iota_2 = -\iota_1.$$

Durch Multiplication der beiden letzten hat man $\iota_1 \iota_3 \iota_3 \iota_2 = + \iota_2 \iota_1$, und da $\iota_3 \iota_3 = -1$ ist

$$\iota_2 \iota_1 = -\iota_1 \iota_2 = -\iota_3,$$

also wenn man mit $\iota_3 \iota_2 = -\iota_1$ in diese Gleichung multiplicirt $\iota_3 \iota_2 \iota_2 \iota_1 = + \iota_1 \iota_3$ und somit

$$\iota_1 \iota_3 = -\iota_3 \iota_1 = -\iota_2.$$

Durch Multiplication der beiden letzten Resultate gewinnt man $\iota_2 \iota_1 \iota_1 \iota_3 = + \iota_3 \iota_2$, also:

$$\iota_3 \iota_2 = -\iota_2 \iota_3 = -\iota_1.$$

So sieht man, dass infolge der Bestimmungsgleichungen die complexen Einheiten bei der Multiplication nicht commutativ sind, sondern das Product je zweier sein Zeichen ändert, wenn die Factoren ihre Stelle wechseln.

Beachtet man noch, dass $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = \iota_1 \iota_1 = -1$, so hat man zur Reduction der Einheitsproducte, folgendes System von Gleichungen, was man bei allen folgenden Rechnungen im Auge behalten muss:

$$\left.\begin{array}{l}
\iota_1 \iota_1 = -1, \quad \iota_2 \iota_2 = -1, \quad \iota_3 \iota_3 = -1 \\
\iota_1 \iota_2 = + \iota_3, \quad \iota_2 \iota_3 = + \iota_1, \quad \iota_3 \iota_1 = + \iota_2 \\
\iota_2 \iota_1 = - \iota_3, \quad \iota_3 \iota_2 = - \iota_1, \quad \iota_1 \iota_3 = - \iota_2 \\
\quad \iota_1 \iota_2 \iota_3 = \iota_2 \iota_3 \iota_1 = \iota_3 \iota_1 \iota_2 = -1 \\
\quad \iota_1 \iota_3 \iota_2 = \iota_2 \iota_1 \iota_3 = \iota_3 \iota_2 \iota_1 = +1
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Mit Hilfe dieser Relationen und des distributiven Principes erhält man, wenn

$$\alpha = a_0 + a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3$$
$$\beta = b_0 + b_1 \iota_1 + b_2 \iota_2 + b_3 \iota_3$$
$$\gamma = c_0 + c_1 \iota_1 + c_2 \iota_2 + c_3 \iota_3$$

und

$$\alpha \beta = \gamma$$

gesetzt wird, bei Ausführung des Productes die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 &= c_0 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2 &= c_1 \\ a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1 &= c_2 \\ a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0 &= c_3 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wie sich denn überhaupt das Product einer Anzahl von Quaternionen immer wieder auf eine einzige bestimmte Quaternion reducirt.

Zur bequemeren Behandlung der Quaternionen bezeichnet man in

$$\alpha = a_0 + a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3$$

das Glied a_0 als den Scalar-theil:

$$\mathrm{S}\alpha = a_0,$$

und als Vector-theil die Summe

$$\mathrm{V}\alpha = a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3,$$

so dass

$$\alpha = \mathrm{S}\alpha + \mathrm{V}\alpha.$$

Dann ist

$$\alpha\beta = (\mathrm{S}\alpha + \mathrm{V}\alpha)(\mathrm{S}\beta + \mathrm{V}\beta) = \mathrm{S}\alpha . \mathrm{S}\beta + \mathrm{S}\beta . \mathrm{V}\alpha + \mathrm{S}\alpha . \mathrm{V}\beta + \mathrm{V}\alpha . \mathrm{V}\beta.$$

und nach Vertauschung der Factoren:

$$\beta\alpha = \mathrm{S}\alpha . \mathrm{S}\beta + \mathrm{S}\beta . \mathrm{V}\alpha + \mathrm{S}\alpha . \mathrm{V}\beta + \mathrm{V}\beta . \mathrm{V}\alpha,$$

worin nur das letzte Product $\mathrm{V}\beta . \mathrm{V}\alpha$ ein anderes geworden ist. Um dessen Veränderung weiter zu übersehen, so bilden wir die beiden als Quaternionen erscheinenden Producte:

$$\begin{aligned} \mathrm{V}\alpha . \mathrm{V}\beta = &- (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &+ (a_2 b_3 - a_3 b_2) \iota_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \iota_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \iota_3 \\ \mathrm{V}\beta . \mathrm{V}\alpha = &- (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &- (a_2 b_3 - a_3 b_2) \iota_1 - (a_3 b_1 - a_1 b_3) \iota_2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1) \iota_3 \end{aligned}$$

und man sieht, dass

$$\left.\begin{array}{l} S(V\alpha . V\beta) = + S(V\beta . V\alpha) \\ V(V\alpha . V\beta) = - V(V\beta . V\alpha) \end{array}\right\} \quad (3)$$

so dass die Producte $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ in dieser Weise:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\beta = S\alpha . S\beta + S\alpha . V\beta + S\beta . V\alpha + S(V\alpha . V\beta) + V(V\alpha . V\beta) \\ \beta\alpha = S\alpha . S\beta + S\alpha . V\beta + S\beta . V\alpha + S(V\alpha . V\beta) - V(V\alpha . V\beta) \end{array}\right\} \quad (4)$$

geschrieben werden können, worin die Veränderung, welche ein Product zweier Quaternionen in seinem Vectortheil durch Vertauschung seiner Factoren erleidet, zur Evidenz gebracht ist.

Als die zu

$$\alpha = S\alpha + V\alpha$$

conjugirte Quaternione bezeichnet man:

$$K\alpha = S\alpha - V\alpha,$$

und es ist:

$$\left.\begin{array}{l} 2 . S\alpha = \alpha + K\alpha \\ 2 . V\alpha = \alpha - K\alpha \end{array}\right\} \quad (5)$$

dann wird:

$$\alpha . K\alpha = (S\alpha + V\alpha)(S\alpha - V\alpha) = (S\alpha)^2 - (V\alpha)^2 = N\alpha,$$

wenn man als Norm $N\alpha$ die Summe der Quadrate:

$$N\alpha = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \alpha . K\alpha \quad (6)$$

bezeichnet, auf welche sich jene Differenz der Quadrate reducirt, da

$$(V\alpha)^2 = (a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3)^2 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad (7)$$

gefunden wird.

Aendert man in dem obigen Producte

$$\alpha\beta = S\alpha . S\beta + S(V\alpha . V\beta) + [S\alpha . V\beta + S\beta . V\alpha + V(V\alpha . V\beta)]$$

das Vorzeichen des Vectortheiles, so hat man:

$$K(\alpha\beta) = S\alpha . S\beta - S\alpha . V\beta - S\beta . V\alpha + S(V\alpha . V\beta) - V(V\alpha . V\beta)$$

oder nach (3)

$$K(\alpha\beta) = S\alpha . S\beta - S\alpha . V\beta - S\beta . V\alpha + V\beta . V\alpha$$

Nun ist

$$K\beta . K\alpha = (S\beta - V\beta)(S\alpha - V\alpha) = S\alpha . S\beta - S\alpha . V\beta - S\beta . V\alpha + V\beta . V\alpha$$

womit man die wichtige Relation:

$$K\beta . K\alpha = K(\alpha\beta) \quad (8)$$

erhält.

Multiplicirt man $\alpha\beta = \gamma$ mit $\mathrm{K}(\alpha\beta) = \mathrm{K}\gamma$, so hat man $\alpha\beta\,.\,\mathrm{K}(\alpha\beta) = \gamma\,.\,\mathrm{K}\gamma$ oder nach (8) $\alpha\beta\,\mathrm{K}\beta\,.\,\mathrm{K}\alpha = \mathrm{N}\gamma$. Nun ist nach (6) $\beta\,\mathrm{K}\beta = \mathrm{N}\beta$ also $\alpha\,\mathrm{K}\alpha\,.\,\mathrm{N}\beta = \mathrm{N}\gamma$ und endlich $\mathrm{N}\alpha\,.\,\mathrm{N}\beta = \mathrm{N}\gamma$, so dass man die Identität: (9)

$$(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

erhält, wo die c aus den a, b vermittelst der Gleichungen (2) zu bestimmen sind. *)

Die (positive) Quadratwurzel aus der Norm:

$$\mathrm{T}\alpha = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

nennt man den Tensor der Quaternion und bezeichnet den Factor

$$\mathrm{U}\alpha = \frac{a_0 + a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

als den Versor, so dass

$$\alpha = \mathrm{T}\alpha\,.\,\mathrm{U}\alpha. \tag{10}$$

Letzterem kann man noch eine wichtige Form geben. Bezeichnet man nämlich:

$$\frac{a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \iota,$$

so hat dieser Ausdruck nach (7) die Eigenschaft, dass

$$\iota\iota = -1,$$

und setzt man:

$$\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \sin\varphi,$$

was offenbar immer möglich ist, so hat man:

---

*) Dieser interessante Satz, nach welchem das Product zweier Zahlen, welche die Summen von vier Quadraten sind, immer wieder als Summe von vier Zahlen, welche von den Elementen der Factoren rational abhängen, dargestellt werden kann, ist zuerst von EULER entwickelt. Er ist die Verallgemeinerung des Satzes, welchen die gemeinen complexen Zahlen an die Hand geben, wonach, wenn

$$(a_0 + a_1 i)(b_0 + b_1 i) = c_0 + c_1 i,$$

also

$$a_0 b_0 - a_1 b_1 = c_0 \qquad a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1$$

ist,

$$(a_0^2 + a_1^2)(b_0^2 + b_1^2) = c_0^2 + c_1^2$$

gesetzt werden kann. Mit der Ausdehnung dieses Satzes auf mehr Glieder haben sich JOHN GRAVES und KIRKMAN (s. oben S. 105 und 110) beschäftigt.

$$\alpha = T\,\alpha\,.\,(\cos\varphi + \iota\sin\varphi), \qquad (11)$$

eine Gestalt der Quaternion, welche der reducirten Form der gewöhnlichen complexen Grössen entspricht, und aus der man die Gleichung

$$\alpha^n = (T\,\alpha)^n\,(\cos n\,\varphi + \iota\sin n\,\varphi) \qquad (12)$$

für ganze n sofort erschliessen kann.

Man ist berechtigt, die Definition der Exponentialgrösse:

$$e^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \qquad (13)$$

auf den Fall, dass β eine Quaternion ist, auszudehnen, so dass man in vorstehender Bezeichnung

$$\alpha = T\,\alpha\,.\,e^{\varphi\iota} \qquad (14)$$

setzen kann. Es ist aber wohl zu beachten, dass der Exponentialgrösse jetzt die Eigenschaft

$$e^\beta\,e^\gamma = e^{\beta+\gamma} \qquad (15)$$

im Allgemeinen n i c h t, und nur dann zukommt, wenn $\beta\gamma = \gamma\beta$ ist; denn es ist in der Quaternionentheorie:

$$(\beta+\gamma)^2 = \beta^2 + \beta\gamma + \gamma\beta + \gamma^2$$

von

$$\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2,$$

und

$$(\beta+\gamma)^3 = \beta^3 + (\beta^2\gamma + \beta\gamma\beta + \gamma\beta^2) + (\gamma^2\beta + \gamma\beta\gamma + \beta\gamma^2) + \gamma^3$$

von

$$\beta^3 + 3\beta^2\gamma + 3\beta\gamma^2 + \gamma^3$$

im Allgemeinen durchaus verschieden — auf dem binomischen Lehrsatze für ganze Exponenten aber beruht jene Eigenschaft (15) in dem Gebiete der gemeinen complexen Zahlen. —

Betrachten wir nur solche Quaternionen, welche reelle Coefficienten haben, so ist ihre Norm eine positive, von Null verschiedene Zahl, ihr Tensor eine reelle positive Zahl und der im Versor (11) erscheinende Winkel, ihre Amplitude, reell.

§. 43.

Producte von Vectoren.

Von besonderer Bedeutung für die Anwendung auf die Geometrie sind die Producte reiner Vectoren, die wir, um Verwechselung mit den allgemeinen Quaternionen zu vermeiden, in diesem

§. durchaus mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen werden, so dass:

$$a = a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3$$
$$b = b_1 \iota_1 + b_2 \iota_2 + b_3 \iota_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

wo $a_1, a_2, a_3, b_1, \ldots$ gemeine complexe Zahlen sind.

In diesem Falle ist $\mathrm{V}\, a = a$, $\mathrm{S}\, a = 0$ und daher der conjugirte Vector

$$\mathrm{K}\, a = -a. \tag{1}$$

Nach (8) in §. 42 hat man $\mathrm{K}(a\, b) = \mathrm{K}\, b \,.\, \mathrm{K}\, a = (-b)(-a)$ also:

$$\mathrm{K}(a\, b) = b\, a. \tag{2}$$

Ebenso ist

$$\mathrm{K}(a\, b\,.\, c) = \mathrm{K}\, c\,.\,\mathrm{K}\, a\, b = \mathrm{K}\, c\,.\,\mathrm{K}\, b\,.\,\mathrm{K}\, a = -c\, b\, a$$
$$\mathrm{K}(a\, b\,.\, c\, d) = \mathrm{K}(c\, d)\,.\,\mathrm{K}(a\, b) = \mathrm{K}\, d\,.\,\mathrm{K}\, c\,.\,\mathrm{K}\, b\,.\,\mathrm{K}\, a = +d\, c\, b\, a$$

u. s. f., so dass nach (5) in § 42

$$\left.\begin{array}{ll} 2\,.\,\mathrm{S}(a\, b) = a\, b + b\, a, & 2\,.\,\mathrm{V}(a\, b) = a\, b - b\, a \\ 2\,.\,\mathrm{S}(a\, b\, c) = a\, b\, c - c\, b\, a, & 2\,.\,\mathrm{V}(a\, b\, c) = a\, b\, c + c\, b\, a \\ 2\,.\,\mathrm{S}(a b c d) = a b c d + d c b a, & 2\,.\,\mathrm{V}(a b c d) = a b c d - d c b a \end{array}\right\} \tag{3}$$

u. s. f. Hieraus, so wie auch aus (3) in §. 42 folgt weiter:

$$\mathrm{S}(a\, b) = +\mathrm{S}(b\, a), \quad \mathrm{V}(a\, b) = -\mathrm{V}(b\, a) \tag{4}$$

und es wechselt daher die Quaternion $a\, b$, welche durch:

$$a\, b = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$
$$+ (a_2 b_3 - a_3 b_2)\iota_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\iota_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\iota_3$$

dargestellt wird, das Zeichen ihres Vectors, wenn die Factoren ihre Plätze vertauschen.

Man hat ferner $a\, b\,.\, c = \{\mathrm{S}(a b) + \mathrm{V}(a b)\} c$; da nun $\mathrm{S}(a b)\,.\, c$ selbst ein Vector ist, so hat man:

$$\mathrm{S}(a\, b\, c) = \mathrm{S}\{\mathrm{V}(a\, b)\,.\, c\} \tag{5}$$

Da nun $\mathrm{V}(a b) = -\mathrm{V}(b a)$, so sieht man, dass $\mathrm{S}(b\, a\, c) = \mathrm{S}\{\mathrm{V}(b a)\,.\, c\}$ $= -\mathrm{S}\{\mathrm{V}(a\, b)\,.\, c\}$ also: $\mathrm{S}(a\, b\, c) = -\mathrm{S}(b\, a\, c)$. Ganz ähnlich überzeugt man sich, dass $\mathrm{S}(a\, b\, c) = -\mathrm{S}(a\, c\, b)$ und da man aus (3) die Gleichung $\mathrm{S}(a\, b\, c) = -\mathrm{S}(c\, b\, a)$ erhält, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} +\mathrm{S}(a\, b\, c) = +\mathrm{S}(b\, c\, a) = +\mathrm{S}(c\, a\, b) \\ = -\mathrm{S}(a\, c\, b) = -\mathrm{S}(b\, a\, c) = -\mathrm{S}(c\, b\, a) \end{array}\right\} \tag{6}$$

Man hat nach (3)

$$2 . \mathrm{V}[a . \mathrm{V}(b\,c)] = a . \mathrm{V}(b\,c) - \mathrm{V}(b\,c) . a;$$

nun ist

$$0 = a . \mathrm{S}(b\,c) - \mathrm{S}(b\,c) . a$$

also durch Addition:

$$2 . \mathrm{V}[a . \mathrm{V}(b\,c)] = a\,b\,c - b\,c\,a. \tag{7}$$

Schreibt man identisch

$$a\,b\,c - b\,c\,a = (a\,b + b\,a)\,c - b\,(c\,a + a\,c),$$

so hat man nach (3)

$$\mathrm{V}[a . \mathrm{V}(b\,c)] = c . \mathrm{S}(a\,b) - b . \mathrm{S}(c\,a), \tag{8}$$

welche Gleichung addirt zu der selbstverständlichen:

$$\mathrm{V}[a . \mathrm{S}(b\,c)] = a . \mathrm{S}(b\,c),$$

die wichtige Gleichung:

$$\mathrm{V}(a\,b\,c) = a\,\mathrm{S}(b\,c) - b\,\mathrm{S}(c\,a) + c\,\mathrm{S}(a\,b) \tag{9}$$

liefert. Stellt man mittels dieser z. B.

$$\mathrm{V}(a\,c\,b) = a\,\mathrm{S}(b\,c) + b\,\mathrm{S}(c\,a) - c\,\mathrm{S}(a\,b)$$

dar, so bemerkt man, dass ausser der aus (3) folgenden Relation:

$$\mathrm{V}(a\,b\,c) = \mathrm{V}(c\,b\,a), \tag{10}$$

zwischen den Vectoren der permutirten Producte $a\,b\,c$, $a\,c\,b, \ldots$ keine so einfachen Beziehungen, als zwischen ihren Scalaren stattfinden.

Aus (8) folgt:

$$\mathrm{V}[b . \mathrm{V}(c\,a)] = a\,\mathrm{S}(b\,c) - c\,\mathrm{S}(a\,b)$$
$$\mathrm{V}[c . \mathrm{V}(a\,b)] = b\,\mathrm{S}(c\,a) - a\,\mathrm{S}(b\,c)$$

und durch Addition dieser Werthe zu (8):

$$\mathrm{V}[a . \mathrm{V}(b\,c)] + \mathrm{V}[b . \mathrm{V}(c\,a)] + \mathrm{V}[c . \mathrm{V}(a\,b)] = 0.$$

Nach (5) und (6) hat man:

$$\mathrm{S}[a . \mathrm{V}(b\,c)] + \mathrm{S}[b . \mathrm{V}(c\,a)] + \mathrm{S}[c . \mathrm{V}(a\,b)] = 3 . \mathrm{S}(a\,b\,c)$$

also, wenn man vorstehende Gleichungen addirt:

$$a . \mathrm{V}(b\,c) + b . \mathrm{V}(c\,a) + c . \mathrm{V}(a\,b) = 3 . \mathrm{S}(a\,b\,c). \tag{11}$$

Aus (8) findet man

$$\mathrm{V}[\mathrm{V}(a\,b) . \mathrm{V}(c\,d)] = d\,\mathrm{S}[c . \mathrm{V}(a\,b)] - c\,\mathrm{S}[\mathrm{V}(a\,b) . d]$$

und somit nach (5)

$$V[V(a\,b).V(c\,d)] = d\,S(a\,b\,c) - c\,S(a\,b\,d)$$

Hienach ist:

$$V[V(c\,d).V(b\,a)] = a\,S(c\,d\,b) - b\,S(c\,d\,a);$$

nun ist aber $V(b\,a) = -V(a\,b)$, also

$$V[V(a\,b).V(c\,d)] = -V[V(b\,a).V(c\,d)] = +V[V(c\,d).V(b\,a)]$$

und daher:

$$d\,S(a\,b\,c) - a\,S(b\,c\,d) + b\,S(c\,d\,a) - c\,S(a\,b\,d) = 0 \quad (12)$$

womit man, wenn d durch r ersetzt wird, die wichtige Formel:

$$r\,S(a\,b\,c) = a\,S(c\,r\,b) + b\,S(a\,r\,c) + c\,S(b\,r\,a) \quad (13)$$

erhält.

Es mag hier noch des Productes von 4 Vectoren kurz gedacht werden: Zerlegt man $a\,b\,c\,d$ in $a\,.\,b\,c\,d$, so trägt das Glied $a\,.\,S(b\,c\,d)$ zum Scalartheile von $a\,b\,c\,d$ nichts bei, da es ein reiner Vector ist; also hat man:

$$S(a\,b\,c\,d) = S\{a.V(b\,c\,d)\};$$

nun ist nach (9) $V(b\,c\,d) = b\,S(c\,d) - c\,S(d\,b) + d\,S(b\,c)$, also:

$$S(a\,b\,c\,d) = S(a\,b).S(c\,d) - S(a\,c).S(d\,b) + S(a\,d).S(b\,c) \quad (14)$$

Hieraus folgt:

$$S(b\,c\,d\,a) = S(b\,c).S(d\,a) - S(b\,d).S(a\,c) + S(b\,a).S(c\,d)$$

also, da der Scalar $S(a\,d) = S(d\,a)$ u. s. f.

$$S(a\,b\,c\,d) = S(b\,c\,d\,a), \quad (15)$$

so dass eine cyklische Permutation der Factoren des Productes von 4 Vectoren nichts an seinem Werthe ändert. Nach (3) hat man noch

$$S(a\,b\,c\,d) = S(d\,c\,b\,a) \quad (16)$$

womit die einfachen Relationen erschöpft sind. Denn der aus (14) abgeleitete Werth:

$$S(a\,b\,d\,c) = S(a\,b)\,S(d\,c) - S(a\,d)\,S(c\,b) + S(a\,c)\,S(b\,d)$$

steht mit $S(a\,b\,c\,d)$ in keiner einfachen Beziehung.

Sucht man $S(a\,b\,c\,d)$ zu bestimmen, indem man $a\,b\,c\,d$ in

$$a\,b\,.\,c\,d = S(a\,b).S(c\,d) + S(a\,b).V(c\,d) + S(c\,d).V(a\,b) + V(a\,b).V(c\,d)$$

zerlegt, so sieht man, dass:

$$S(a\,b\,c\,d) = S(a\,b).S(c\,d) + S\{V(a\,b).V(c\,d)\},$$

und durch Vergleichung mit (14) die Identität:

$$S\{V(a\,b).V(c\,d)\} = S(a\,d).S(b\,c) - S(a\,c).S(b\,d) \quad (17)$$

erhalten wird.

Weitere Relationen dieser Art, welche sich noch in grosser Anzahl beibringen liessen, übergehen wir. Doch können wir nicht unterlassen, hier noch

auf die Form aufmerksam zu machen, welche das Product dreier Vectoren explicite zeigt. Man hat:

$$(a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3)(b_1 \iota_1 + b_2 \iota_2 + b_3 \iota_3) =$$
$$-(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\iota_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\iota_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\iota_3$$

also:

$$\begin{aligned}
&(a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3)(b_1 \iota_1 + b_2 \iota_2 + b_3 \iota_3)(c_1 \iota_1 + c_2 \iota_2 + c_3 \iota_3) \\
&= -[(a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2] \\
&\quad + [-(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_3 - (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_2]\iota_1 \\
&\quad + [-(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_1 - (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_3]\iota_2 \\
&\quad + [-(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_2 - (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_1]\iota_3
\end{aligned}$$

woraus man

$$S(a\,b\,c) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{18}$$

und, da

$$S(a\,b) = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3),$$

durch identische Umgestaltung für $V(a\,b\,c)$ den in (9) gegebenen Ausdruck erhält. So wird z. B. (12) abgeleitet werden können aus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

einer Gleichung, die identisch erfüllt ist, weil die erste Zeile lineare Functionen der Glieder in den folgenden Zeilen enthält.

§. 44.

Division der Quaternionen.

Unter dem Quotienten

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha} \tag{1}$$

zweier Quaternionen hat man (vergl. §. 7) eine solche Quaternion ξ zu verstehen, für welche:

$$\xi \alpha = \beta \tag{2}$$

ist. Hieraus erhält man zur Bestimmung der Coefficienten in

$$\xi = x_0 + x_1 \iota_1 + x_2 \iota_2 + x_3 \iota_3$$

die 4 linearen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_0 a_0 - x_1 a_1 - x_2 a_2 - x_3 a_3 &= b_0 \\ x_0 a_1 + x_1 a_0 + x_2 a_3 - x_3 a_2 &= b_1 \\ x_0 a_2 - x_1 a_3 + x_2 a_0 + x_3 a_1 &= b_2 \\ x_0 a_3 + x_1 a_2 - x_2 a_1 + x_3 a_0 &= b_3 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Anstatt die Elimination der x_0, x_1, x_2, x_3 direct vorzunehmen, multipliciren wir (2) mit $\mathrm{K}\,\alpha$ und erhalten so $\xi\,\alpha\,\mathrm{K}\,\alpha = \beta\,\mathrm{K}\,\alpha$ oder nach (6) in §. 42:

$$\xi = \frac{1}{\mathrm{N}\,\alpha}\,\beta\,\mathrm{K}\,\alpha \quad (4)$$

woraus sich denn

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{N}\,\alpha\,.\,x_0 &= b_0 a_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 \\ \mathrm{N}\,\alpha\,.\,x_1 &= b_1 a_0 - b_0 a_1 + b_3 a_2 - b_2 a_3 \\ \mathrm{N}\,\alpha\,.\,x_2 &= b_2 a_0 - b_3 a_1 - b_0 a_2 + b_1 a_3 \\ \mathrm{N}\,\alpha\,.\,x_3 &= b_3 a_0 + b_2 a_1 - b_1 a_2 - b_0 a_3 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

als die zu (3) inversen Gleichungen sofort ergeben.

Man sieht hieraus, dass die Division mit α in β eindeutig und bestimmt ist, mit Ausnahme des Falles, dass

$$\mathrm{N}\,\alpha = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$$

ist, in welchem sie durchaus unbestimmt wird. Solcher Quaternionen, welche in Bezug auf die Division dieselbe Rolle spielen, wie die Null in dem gemeinen Zahlensysteme, gibt es unendlich viele, wenn die Elemente a_0, a_1, a_2, a_3 der Quaternion gewöhnliche complexe Zahlen sind. Werden letztere aber in ihrer Variabilität auf reelle Zahlen beschränkt, wie dies bei der geometrischen Anwendung der Quaternionen geschieht, so kann $\mathrm{N}\,\alpha$ nur verschwinden, wenn $\alpha = 0$, d. h. $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$; und es ist die Division in diesem Gebiete der reellen Quaternionen nur dann unbestimmt, wenn der Divisor Null ist. —

Es ist von Interesse, aus der Gleichung (4) die Sätze des §. 7, welche für eine nicht commutative Multiplication galten, direct abzuleiten.

Zunächst ist aus (4)

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta\,\mathrm{K}\,\alpha}{\mathrm{N}\,\alpha}$$

also

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\mathrm{K}\,\alpha}{\mathrm{N}\,\alpha}$$

und daher

$$\beta \cdot \frac{1}{\alpha} = \beta \cdot \frac{\mathrm{K}\,\alpha}{\mathrm{N}\,\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

s. (13) in §. 7. Ferner ist

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\,\beta\,\mathrm{K}\,\gamma}{\mathrm{N}\,\gamma} = \frac{\alpha\,\beta}{\gamma}$$

s. (4) in §. 7; und weiter:

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\gamma} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\mathrm{K}\,\gamma}{\mathrm{N}\,\gamma} = \frac{\alpha\,\mathrm{K}\,\beta\,.\,\mathrm{K}\,\gamma}{\mathrm{N}\,\beta\,.\,\mathrm{N}\,\gamma}$$

Da nun nach (8) in §. 42 $\mathrm{K}\,\beta\,.\,\mathrm{K}\,\gamma = \mathrm{K}\,(\gamma\,\beta)$, so hat man vorstehenden Quotienten

$$= \frac{\alpha\,\mathrm{K}\,(\gamma\,\beta)}{\mathrm{N}\,\gamma\,.\,\mathrm{N}\,\beta} = \frac{\alpha}{\gamma\,\beta}$$

s. (5) in §. 7. Endlich ist

$$\frac{\alpha}{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)} = \frac{\alpha\,\mathrm{N}\,\gamma}{\beta\,\mathrm{K}\,\gamma} = \frac{\alpha\,\mathrm{K}\,(\beta\,.\,\mathrm{K}\,\gamma)}{\mathrm{N}\,\beta}$$

und da $\mathrm{K}\,(\mathrm{K}\,\gamma) = \gamma$, so ist $\mathrm{K}\,(\beta\,.\,\mathrm{K}\,\gamma) = \mathrm{K}\,(\mathrm{K}\,\gamma)\,.\,\mathrm{K}\,\beta = \gamma\,.\,\mathrm{K}\,\beta$ und somit vorstehender Quotient

$$= \frac{\alpha\,\gamma\,\mathrm{K}\,\beta}{\mathrm{N}\,\beta} = \frac{\alpha\,\gamma}{\beta}$$

s. (6) in §. 7. Dies sind die Grundgleichungen für die Transformation der Quotienten von Quaternionen, aus denen Identitäten wie

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \tag{6}$$

leicht folgen; denn es ist

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\beta}{\gamma} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \alpha \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}\,.$$

Ebenso ist

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = 1$$

u. s. f. Dagegen sind Gleichungen wie

$$\beta\,\frac{\alpha}{\beta} = \alpha,\ \frac{\beta\,\alpha}{\beta} = \alpha,\ \frac{\alpha}{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \gamma$$

(vergl. 1*, 2*, 6* in §. 7) in der Theorie der Quaternionen **nicht** wahr.

§. 45.

Algebra der Quaternionen.

Der Umstand, dass für die Quaternionen die Division nicht in allen Fällen bestimmt ist, bewirkt in seiner Vielgestaltigkeit noch mancherlei paradoxe Verhältnisse. So hat die Gleichung

$$\xi^2 = 0,$$

wenn

$$\xi = x_1 \iota_1 + x_2 \iota_2 + x_3 \iota_3$$

gesetzt wird, unendlich viele Wurzeln, nämlich alle die, für welche:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

und es tritt die Erscheinung, dass sich ein Product nicht in jedem Falle ändert, wenn sich ein Glied des Productes ändert, eclatant hervor, wenn man bedenkt, dass die Gleichung:

$$\xi \eta = \zeta,$$

wo ξ eine Wurzel von $\xi^2 = 0$ bezeichnet, gleichzeitig mit

$$\xi (\eta + x \xi) = \zeta$$

erfüllt ist, wenn x irgend eine gemeine complexe Zahl ist.

Ebenso wie $\xi^2 = 0$ hat auch die Gleichung

$$\xi^2 = a,$$

wo a wiederum eine gemeine complexe Zahl bezeichnet, unendlich viele Wurzeln. Denn jedes

$$\xi = x_1 \iota_1 + x_2 \iota_2 + x_3 \iota_3$$

erfüllt, wenn

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -a$$

ist, jene Gleichung. Ist z. B. $a = -1$, so gibt es ausser $\xi = \iota_1, \iota_2, \iota_3$ noch unendlich viele Wurzeln ξ der Gleichung

$$\xi^2 = -1,$$

und zwar sind solche

$$\xi = \iota_1 \cos \alpha_1 + \iota_2 \cos \alpha_2 + \iota_3 \cos \alpha_3$$

wenn $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$, wo also α_1, α_2, α_3 die Winkel einer Richtung mit den Axen eines orthogonalen Coordinatensystems, aber auch allgemein complexe Zahlen sein können. Es ist aber, da die Multiplication einer Quaternion und einer gemeinen complexen Zahl commutativ ist:

$$\xi^2 - a = (\xi - \sqrt{a})(\xi + \sqrt{a})$$

und wenn die Quaternion ξ eine der unendlich vielen Wurzeln von $\xi^2 = a$ bedeutet, so verschwindet das Product

$$(\xi - \sqrt{a})(\xi + \sqrt{a}) = 0$$

ohne dass einer der Factoren verschwindet. So ist z. B.

$$(\iota_1 - i)(\iota_1 + i) = \iota_1^2 + \iota_1 i - i \iota_1 - i^2 = \iota_1^2 - i^2 = 0,$$

wo i die gewöhnliche imaginäre Einheit bedeutet, ohne dass $\iota_1 = \pm i$ gesetzt werden darf.

Es liegt hier die Frage nach der Auflösung der algebraischen Gleichungen in Quaternionen so nahe, dass wir sie wenigstens in der Hauptsache beantworten wollen.

Ist eine Gleichung $n$ten Grades

$$\alpha_0 \xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0$$

gegeben, wo $\alpha_0, \ldots \alpha_n$ Quaternionen, oder im speciellen auch gewöhnliche complexe oder reelle Zahlen bezeichnen können, und ξ als Quaternion bestimmt werden soll, so erhält man durch Vergleichung der mit den 4 Einheiten multiplicirten Glieder und wenn man

$$\xi = x_0 + x_1 \iota_1 + x_2 \iota_2 + x_3 \iota_3$$

setzt, 4 Gleichungen, welche in jeder der Unbekannten x_0, x_1, x_2, x_3 vom $n$ten Grade sind, und deren Auflösung n^4 simultane Systeme, d. h. n^4 Werthe von ξ ergibt. Es hat also eine Gleichung 2ten Grades im allgemeinen 16, eine Gleichung 3ten Grades 81 Wurzeln u. s. f.

Jene Gleichungen sind z. B. für eine quadratische Gleichung

$$\alpha \xi^2 + \beta \xi + \gamma = 0$$

wo die Coefficienten von α, β, γ durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet werden:

$$a_0(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) - 2a_1x_0x_1 - 2a_2x_0x_2 - 2a_3x_0x_3 + b_0x_0 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 + c_0 = 0$$
$$a_1(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + 2a_0x_0x_1 - 2a_3x_0x_2 + 2a_2x_0x_3 + b_1x_0 + b_0x_1 - b_3x_2 + b_2x_3 + c_1 = 0$$
$$a_2(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + 2a_3x_0x_1 + 2a_0x_0x_2 - 2a_1x_0x_3 + b_2x_0 + b_3x_1 + b_0x_2 - b_1x_3 + c_2 = 0$$
$$a_2(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) - 2a_2x_0x_1 + 2a_1x_0x_2 + 2a_0x_0x_3 + b_3x_0 - b_2x_1 + b_1x_2 + b_0x_3 + c_3 = 0$$

In speciellen Fällen reducirt sich die Anzahl der Wurzeln bedeutend.

Die obige Form der Gleichungen $n$ten Grades ist aber keineswegs die allgemeinste; denn betrachten wir z. B. lineare Gleichungen, so können diese neben Gliedern $\alpha \xi$ noch andere $\xi \beta$ oder allgemein $\alpha \xi \beta$ enthalten, welche sich, da die Vertauschung der Factoren nicht zulässig ist, nicht auf erstere reduciren. Die allgemeine Form der linearen Gleichungen ist daher:

$$\sum_n \alpha_n \xi \beta_n = \gamma$$

wo die Summe aus beliebig vielen Gliedern besteht; denn in der Form $\alpha \xi \beta$ sind offenbar die speciellen $\alpha \xi$ und $\xi \beta$ eingeschlossen.

Die quadratischen Gleichungen können neben Gliedern $\alpha \xi^2$, $\xi^2 \beta$, $\alpha \xi^2 \beta$ noch Glieder $\alpha \xi \beta \xi \gamma$ enthalten und zwar umfasst letztere Form jene speciellen, so dass:

$$\sum_n \alpha_n \xi \beta_n \xi \gamma_n + \sum_m \delta_m \xi \varepsilon_m = \zeta$$

die allgemeinste quadratische Gleichung darstellt. Man kann so mit Leichtigkeit die allgemeinsten Formen der Gleichungen $n$ten Grades angeben und sieht, dass das obige Raisonnement, nach welchem jeder solchen Gleichung n^4 Wurzeln zukommen, auch für diese ihre Gültigkeit behält.

Es würde der Natur des Quaternionencalculs in seiner Anwendung auf Geometrie wenig entsprechen, wenn man die Auflösung solcher Gleichungen in der angegebenen Weise auf die einzelne Bestimmung der 4 Coefficienten reduciren wollte. Denn es würde dabei die geometrische Interpretation des Resultates überall erst nachträglich (wie in der analytischen Geometrie) durch ein glückliches Aperçu gefunden werden können, während es eben eine der wesentlichen Eigenthümlichkeiten der Anwendung der Quaternionen und überhaupt der complexen Zahlen auf die Geometrie ausmacht, dass sie überall die geometrische Bedeutung der Formeln sofort ergeben. Hamilton hat daher Auflösungsmethoden für die linearen (Lectures on Quat., S. 559) und die quadratischen Gleichungen (Lectures, S. 631) gegeben, bei denen der Scalar und der Vector der gesuchten Quaternion direct bestimmt wird, indem man mit den Zeichen S, V in der §. 42 und 43 gelehrten Weise operirt. Diese Methoden sind jedoch sehr complicirt, wenig über-

sichtlich und doch rein theoretisch von so geringem Interesse, dass ich bei dem Umfange, den ihre Exposition einnehmen würde, hier mich begnüge, sie nur angedeutet zu haben.

Nachdem im vorstehenden die Theorie der Quaternionen selbstständig und ohne Rücksicht auf ihre geometrische Darstellbarkeit behandelt ist, geben wir im folgenden Abschnitt ein System geometrischer Operationen und daraus entstehender Grössen, welche schliesslich in §. 55, als mit den hier auseinandergesetzten formalen Operationen zusammenfallend, nachgewiesen werden. Die Entwickelung von §. 46 bis 54 aber ist, wie ich ausdrücklich bemerke, gänzlich unabhängig von der vorstehenden.

NEUNTER ABSCHNITT.

Geometrische Darstellung der Quaternionen.

§. 46.

Addition der Bogen auf der Kugel.

In den geometrischen Untersuchungen des V. Abschnittes ist die Ebene, in denen des VII. der freie Raum als Constructionsfeld benutzt worden. Bei der durchgreifenden Analogie, welche die Geometrie der Kugel mit der der Ebene hat, ist nun der Versuch gerechtfertigt, auf der Kugel selbst, und ohne dass dieselbe auf andere Raumgebilde bezogen wird, Operationen durchzuführen, welche den allgemein formalen Regeln des §. 6 genügen.

Sind A, B,... bestimmte (von ihren Gegenpunkten unterschiedene) Punkte einer Kugel, so werden wir unter der Differenz $(B - A)$ den zwischen A und B liegenden Bogen AB eines Hauptkreises — den Versor AB — verstehen, seiner Grösse nach und insofern er in diesem Hauptkreise liegt; d. h.: wir werden $AB = CD$ setzen, wenn der Bogen CD ebenso gross als AB ist, und mit ihm gleichgerichtet, in demselben Hauptkreise liegt, während zwei Bogen, welche diesen beiden Bedingungen nicht gleichzeitig genügen, als ungleich angesehen werden.

Zwischen zwei Punkten A, B eines Hauptkreises gibt es 2 Bogen, deren Summe den ganzen Umkreis 2π ausmacht. Einer Festsetzung, welcher von diesen gemeint sei, bedarf es so lange nicht, als der Bogen, dessen Anfangs- und Endpunkt immer bestimmt sein muss, nur als geometrisches Gebilde erscheint. Soll aber ein solcher Bogen gemessen werden, so wird man die beiden oder vielmehr die sämmtlichen Bogen, durch welche A, B in ihrem Hauptkreise verbunden werden können, von einander unterscheiden müssen. Dies

kann geschehen, indem man sich den positiven Sinn des Hauptkreises gegeben denkt, in welchem seine Bogen gemessen werden. Bezeichnet man dann mit α den in diesem Sinne von A nach B führenden kleinsten Bogen, so wird der Bogen, welcher im umgekehrten Sinne von A zu B führt, als $(\alpha - 2\pi)$ anzusetzen sein, wie überhaupt der Bogen durch jene Festsetzung noch um Vielfache von 2π unbestimmt bleibt.

Wir werden im Folgenden den positiven Sinn eines Hauptkreises überall, wo es dienlich ist, ohne weiteres als willkührlich gegeben ansehen und ihn in den Figuren durch angesetzte Pfeile bezeichnen.

Der Begriff einer Differenz $B - A$ setzt den der Summe voraus, nämlich

$$(B - A) + A = B,$$

oder in unserer Bezeichnung

$$A\,B + A = B,$$

d. h. man addirt einen Bogen $A\,B$ zu einem Punkte A, indem man letzteren auf seinem Hauptkreise nach B, also um den Bogen $A\,B$ verschiebt. Erschien daher der Bogen $A\,B$ zunächst nur als der mathematische Ausdruck des Lagenverhältnisses von A und B, so ist er in letzterer Gleichung ein Zeichen, welches eine Operation, eine gewisse Verschiebung bezeichnet und kann daher sehr passend ein Versor genannt werden.

Da die Differenz zweier Punkte kein neuer Punkt, sondern ein davon ganz verschiedenes geometrisches Gebilde, ein Versor ist, so leuchtet ein, dass zur vollständigen Definition des Additions- und Subtractionsbegriffes von Punkten und Versoren noch weitere Conventionen nöthig sind, welche uns durch das Princip der Permanenz an die Hand gegeben werden:

So wird man von der Gleichung:

$$(C - B) + (B - A) = (C - A), \quad B\,C + A\,B = A\,C$$

ausgehend (s. Fig. 16), folgende Definition erhalten:

Unter der Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreieckes versteht man die dritte Seite, oder genauer: Wenn man mit B den einen Durchschnitt der Hauptkreise zweier Bogen α, β bezeichnet und $\alpha = AB$, $\beta = BC$ macht, so ist

$$\beta + \alpha = B\,C + A\,B = A\,C$$

dem A und C verbindenden Hauptkreisbogen gleich.

Unter $\alpha + \beta$ wird man dann einen Bogen zu verstehen haben, den man erhält, wenn man $\beta = C'B$, $\alpha = BA'$ setzt; dann ist:

$$\alpha + \beta = BA' + C'B = C'A'$$

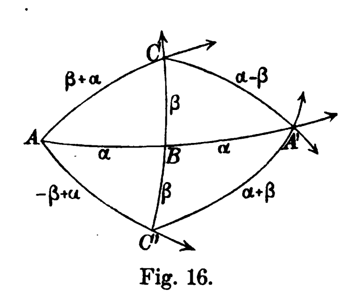


Fig. 16.

ein Bogen, der dem AC zwar an absoluter Grösse gleich ist, aber mit ihm im Allgemeinen nicht in einem und demselben Hauptkreise liegt und daher von ihm als verschieden angesehen werden muss. Die Commutativität findet somit bei dieser Addition nicht statt.

Es kann also auch keine mit ihr verbundene Multiplication geben (s. §. 7) und es wäre daher der Name der Addition für vorstehende Thesis im Grunde nicht zulässig. In der That werden wir in §. 51 u. ff. sehen, dass die hier als Addition bezeichnete Operation wesentlich eine Multiplication ist. Indess wollen wir für diese Zusammensetzung der Bogen bei der Analogie, die sie mit der Addition der Strecken hat, diesen Namen einstweilen beibehalten und sie zum Unterschiede als sphärische Addition bezeichnen.

Die Figur $ACA'C'$ heisst nach Gudermann (Lehrb. d. nied. Sphärik 1835, §. 78, 83) ein sphärisches Parallelogramm, und die gleichen Seiten AC, $C'A'$ parallel. In diesem Sinne wird man sagen müssen, dass, anders wie bei Strecken, zwei Versoren als einander nicht gleich anzusehen sind, wenn sie auch gleich an Grösse und parallel sind.

Nur im Falle, dass α, β Versoren desselben Hauptkreises sind, ist die Addition, welche sich dann auf die gewöhnliche arithmetische Addition reducirt, commutativ. Sind α, β Quadranten*), so liegt $C'A'$ mit AC in demselben Hauptkreise, aber in entgegengetztem Sinne, so dass $(\alpha + \beta) = -(\beta + \alpha)$.

Die Subtraction zweier Versoren ergibt sich mit Rücksicht auf das allgemeine Gesetz, dass ein Versor sein Zeichen wechselt, wenn seine beiden Glieder vertauscht werden, denn wenn $\alpha = BA'$, $\beta = BC$ (Fig. 16), so ist

$$\alpha - \beta = \quad BA' - BC = BA' + CB = CA'.$$
$$-\beta + \alpha = -C'B + AB = BC' + AB = AC'.$$

---

*) „Quadrantal“ oder „Right Versors“ nach Hamilton.

§. 47.

Addition von Hauptkreisen auf der Kugel.

In der Sphärik gehen überall zwei Reihen von Sätzen nebeneinander her, von denen sich die eine auf Hauptkreise und ihre Durchschnittspunkte bezieht, die andere auf Punkte der Kugel und die sie verbindenden Hauptkreise. Man erhält bekanntlich je zwei solche in dualer Beziehung stehende Sätze aus einander, indem man die Hauptkreise durch ihre Pole, die Punkte durch ihre Aequatoren, denen sie als Pole entsprechen, ersetzt.

Soll aber die Beziehung eine eindeutige sein, bei welcher jedem Kreise nur Ein Pol entspricht, ebenso wie jedem Pole nur Ein Kreis, so muss man jedem Hauptkreise einen bestimmten (übrigens willkürlichen) positiven Sinn beilegen und ihn in der dualen Figur nur durch einen Pol, den positiven, ersetzen, den wir dadurch bestimmen wollen, dass von ihm aus einem auf der Kugel stehenden Beobachter jener positive Drehungssinn des Hauptkreises von links nach rechts, wie der Zeiger der Uhr gehend, erscheinen soll. Misst man dann in demselben Sinne den Winkel $a\,b$ der positiven Richtungen zweier Hauptkreise a, b, so ist derselbe gleich dem Bogen AB, welchen die positiven Pole A und B dieser Hauptkreise mit einander bilden (Fig. 17). Soll jener Winkel $a\,b$ bis auf Vielfache des Umkreises 2π numerisch bestimmt sein, so muss derjenige Durchschnittspunkt C der beiden Hauptkreise $a\,b$ angegeben werden, an welchem der betreffende Winkel gemessen werden soll; dann ist dieser numerisch gleich dem Bogen $A\,B$, wenn der positive Sinn des Hauptkreises $A\,B$ so bestimmt wird, dass jener angegebene Durchschnitt sein positiver Pol ist.

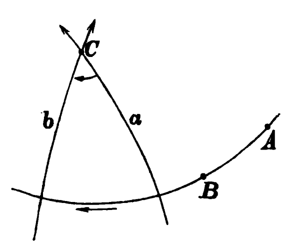


Fig. 17.

Als Differenz zweier Hauptkreise a, b erscheint ihr Winkel $a\,b$. Construirt man nun die zu Fig. 16 duale Figur, so hat man unter der sphärischen Summe zweier Winkel $b\,c + a\,b$ den Winkel $a\,c$ zu verstehen. Nimmt man den Sinn der Seiten eines sphärischen Dreieckes in der Fig. 18 angedeuteten Weise an, so heisst dies: der Aussenwinkel eines sphärischen Dreieckes ist die sphärische Summe der beiden gegenüberliegenden inneren Winkel desselben.

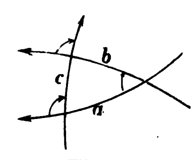


Fig. 18.

§. 48.

Addition von Punkten auf der Kugel.

Wir sind in §. 46 von Punkten auf der Kugel ausgegangen und haben ihre Differenz als einen Versor kennen gelernt, dabei jedoch die Addition der Punkte selbst noch nicht definirt. Um nun auch diese zu erledigen, bedarf es einer neuen Festsetzung. Wollte man bei der Bedeutung der Summe zweier Punkte, wie sie in §. 33 gegeben ist, stehen bleiben, so würde man zu einer anderen Definition der Gleichheit von Versoren gelangen, als sie S. 157 angegeben wurde. Um mit Obigem nicht in Widerspruch zu treten, werden wir ein anderes Verfahren einschlagen, und zwar Punkte und Versoren homogen machen. Wir setzen nämlich fest, dass ein Punkt C einem Quadrantalversor MN gleich ist, der auf seinem Aequator liegt, so dass von C aus der Bogen $MN = +\frac{1}{2}\pi$ nach Festsetzung einer für alle Punkte der Kugel übereinstimmenden positiven Drehungsrichtung, und also C der positive Pol des Bogens MN ist:

$$C = N - M \tag{1}$$

und dass man Punkte addirt, indem man ihre Quadrantalversoren addirt.

Wir werden, wie schon bemerkt, um die Anschauung zu fixiren, im Folgenden die Drehung um den Pol C immer positiv nennen, wenn sie für einen in C auf der äusseren Seite der Kugel stehenden Beobachter von links nach rechts erscheint, oder, wie man dasselbe ausdrücken kann, wenn sie im Sinne des Zeigers einer Uhr geschieht, welche mit dem Zifferblatte nach aussen auf den Punkt C gelegt wird.

Soll jene Festsetzung über die Bedeutung eines Punktes als Quadrantalversor zulässig sein, so muss gezeigt werden, dass sie mit Hilfe des obigen Additionsbegriffes der Versoren nothwendig auf die obige Bedeutung von $B - A$ als Versor AB zurückführt. In der That sei (Fig. 19) $B = ED$, $A = EC$, wo ED, EC Quadranten auf den Aequatoren von B, A sind, deren Durchschnitt E ist. Dann geben vorstehende Regeln:

$$AB = B - A = ED - EC = ED + CE = CD.$$

Es ist aber in der That $AB = CD$; denn es liegen C und D auf dem Hauptkreise AB, und bestimmt man den Sinn des

Hauptkreises AB so, dass E sein positiver Pol ist, so hat man $DB = +\frac{\pi}{2}$, $CA = +\frac{\pi}{2}$, also $CD = CA + AB + BD = AB$.

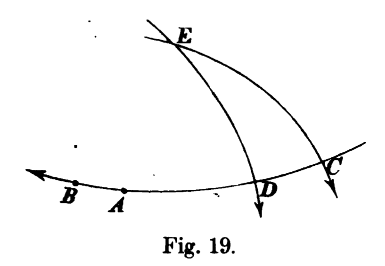


Fig. 19.

Ferner sieht man, dass

$$(B - A) + A = B.$$

In der That ist unter den eben gemachten Annahmen $AB = CD$, $A = EC$, also

$$(B - A) + A = AB + A = CD + EC = ED = B.$$

Dem Gegenpunkte A' von A entspricht offenbar ein Versor, welcher dem von A entgegengesetzt ist, so dass

$$A + A' = 0,\ A = -A' \tag{2}$$

gesetzt werden muss. Es kann daher jede Summe von Punkten, wenn man ihre Gegenpunkte einführt, sofort in eine Differenz verwandelt werden; es ist nämlich

$$B + A = B - A' = A'B = (AB + A'A) = AB + \pi, \tag{3}$$

wenn hier unter π, wie leicht verständlich, der halbe Umfang des Hauptkreises AB verstanden wird. Vertauscht man B mit A, so findet man

$$A + B = BA + \pi.$$

Da aber statt $+\pi$ ohne Weiteres vermöge der Vieldeutigkeit der Bogen um Vielfache von 2π, $-\pi$ geschrieben werden kann, so ist

$$A + B = -(\pi + AB) = -(B + A).$$

Die Summe zweier Punkte ist also im Allgemeinen ein Versor, welcher nicht einem Quadranten, also nicht einem Punkte gleich ist, und ändert ihr Zeichen, wenn man die Summanden mit einander vertauscht.

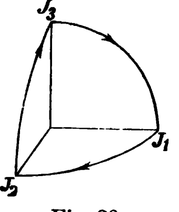
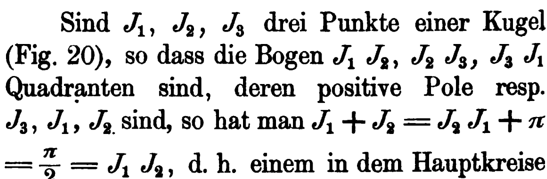


Fig. 20.


Sind J_1, J_2, J_3 drei Punkte einer Kugel (Fig. 20), so dass die Bogen $J_1 J_2$, $J_2 J_3$, $J_3 J_1$ Quadranten sind, deren positive Pole resp. J_3, J_1, J_2 sind, so hat man $J_1 + J_2 = J_2 J_1 + \pi = \frac{\pi}{2} = J_1 J_2$, d. h. einem in dem Hauptkreise

$J_1 J_2$ liegenden Quadranten gleich, der durch den Pol desselben vertreten werden kann, so dass

$$\left.\begin{array}{l} J_1 + J_2 = J_3, \quad J_2 + J_3 = J_1, \quad J_3 + J_1 = J_2 \\ J_2 + J_1 = J_3', \quad J_3 + J_2 = J_1', \quad J_1 + J_3 = J_2' \end{array}\right\} \quad (4)$$

wo J_1', J_2', J_3' die Gegenpuncte von J_1, J_2, J_3 bezeichnen. Unter $J_1 + J_1$, welches sich nach obiger Grundformel (3) $= \pi$ ergibt, hat man einen Versor zu verstehen, welcher in einem durch J_1 gehenden Hauptkreise um π dreht, ebenso unter $J_2 + J_2$ und $J_3 + J_3$:

$$J_1 + J_1 = \pi, \; J_2 + J_2 = \pi, \; J_3 + J_3 = \pi \qquad (5)$$

Es ist sehr leicht, das associative Princip bei der Addition solcher Quadrantalversoren im speciellen zu erweisen. Man hat

$$(J_1 + J_2) + J_3 = J_3 + J_3 = \pi, \; J_1 + (J_2 + J_3) = J_1 + J_1 = \pi,$$

woraus

$$J_1 + J_2 + J_3 = \pi$$

hervorgeht, indem unter diesem π nichts anderes als eine Drehung um einen Halbkreis zu verstehen ist. Ferner hat man

$$J_1 + (J_1 + J_2) = J_1 + J_3 = J_2'$$

$$(J_1 + J_1) + J_2 = \pi + J_2 = J_2'$$

also

$$J_1 + J_1 + J_2 = J_2'.$$

Weiter ist

$$J_1 + (J_2 + J_1) = J_1 + J_3' = J_1 + J_3 + \pi = J_2' + \pi = J_2$$

$$(J_1 + J_2) + J_1 = J_3 + J_1 = J_2$$

also

$$J_1 + J_2 + J_1 = J_2,$$

und ebenso findet man:

$$J_1 + J_2 + J_2 = J_1'.$$

Da man aus diesen Gleichungen durch Vertauschung der Indices alle anderen, das associative Princip darstellenden ableiten kann, so ist es damit für drei Punkte der Kugel in der angegebenen Lage vollständig erwiesen.

Es leuchtet ein, dass im Vorstehenden eine Differenz zweier Punkte $(B - A)$ im Grunde eine doppelte Bedeutung hat. Einmal drückt sie den Bogen AB, seiner Lage und Grösse nach, an sich als geometrisches Object aus, andererseits aber kann AB als ein Operator, ein Versor angesehen werden, welcher auf einen anderen Bogen BC angewandt, d. h. zu ihm addirt, ihn in bestimmter Weise dreht und verändert, so dass $BC + AB = AC$, also ein neuer Bogen erzeugt wird. Auch in der Gleichung $AB + A = B$ tritt diese Tendenz deutlich zu Tage. Ein Punkt J_1 selbst hat eben-

falls eine zwiefache Bedeutung; einmal drückt er den Punkt seiner Lage nach aus, das andere mal, als Quadrantalversor, zeigt er die Tendenz einer Drehung in seinem Aequator an, welche nur dann zu voller Wirkung kommt, wenn er mit einem auf diesem liegenden Punkte J_2 verbunden wird, wo dann jene Drehung diesen Punkt J_2 in J_3 überführt; denn es ist $J_1 + J_2 = J_3$. So sind vorstehende Formeln noch einer neuen Auffassung und Erklärung fähig. Vergl. auch §. 52.

§. 49.

Das associative Princip bei der Addition von Versoren.

Soll die sphärische Addition im Sinne des §. 4 eine Thesis sein, so muss für irgend drei Bögen α, β, γ das associative Princip

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

gelten.

Es sei B (Fig. 21) der Durchschnitt der Kreise β, γ; dann mache man $\gamma = AB$, $\beta = BC$ und erhält so $\beta + \gamma = BC + AB = AC$. Ist E der Durchschnitt von AC mit dem Kreise α, so mache man $AC = DE$, $\alpha = EF$, so ist $\alpha + (\beta + \gamma) = EF + AC = EF + DE = DF$. Andererseits sei H der Durchschnitt von α mit β und man mache $\alpha = HI$, $\beta = GH$, so ist $\alpha + \beta = HI + GH = GI$, und wenn L der Durchschnitt von γ mit GI ist, so setze man $\gamma = KL$, $GI = LM$, also $(\alpha + \beta) + \gamma = GI + KL = LM + KL = KM$. Das associative Princip verlangt dann, dass $DF = KM$, also die Bogen DF, KM auf demselben Hauptkreise liegen und von derselben Grösse sein sollen. Es leuchtet ein, dass dieser Satz geometrisch so gefasst werden kann:

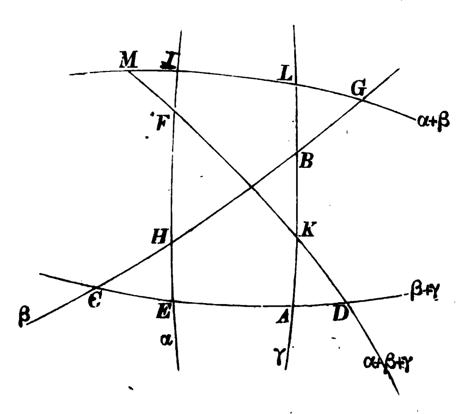


Fig. 21.

Wenn die erste, dritte, fünfte Seite KL, GH, ED eines sphärischen Sechsecks $KLGHED$ bei passender Verschiebung in ihren Hauptkreisen ein sphärisches Dreieck ABC bilden, so können auch die zweite, vierte, sechste Seite LG, HE, DK durch Verschiebung zu einem Dreieck MIF zusammengesetzt werden.

Diesen Satz hat nun Hamilton einmal mit Hilfe von Sätzen über sphärische Kegelschnitte, dann aber auch durch complicirte Betrachtungen und aus der Kugel selbst heraustretende Constructionen erwiesen, welche, obgleich den Elementen angehörend, auf weit hergeholten Argumenten beruhen und sich sonderbar genug bei dem Beweise eines fundamentalen sphärischen Theorems ausnehmen (s. Lectures von S. 277 an). Später hat er selbst die Constructionen unangemessen gefunden (s. Elements von S. 286 an) und einen selbstständigen Beweis des associativen Principes durch eine andere Anordnung der Sätze der Quaternionentheorie (s. Anmerkung zu §. 54) überflüssig gemacht. Aber auch so wird der vorstehende rein sphärische Satz durch Constructionen ausserhalb der Kugel erwiesen, und die Eleganz der Entwickelung wesentlich beeinträchtigt. Es hat aber Möbius (Ber. d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss., Leipzig 1859. S. 138) einen Beweis des associativen Principes gegeben, der durchaus sachgemäss und einfach ist, und auf folgenden Betrachtungen beruht:

Es seien (Fig. 22) um einen und denselben Mittelpunkt O zwei gleiche Kugeln $FABGH$ und PQ beschrieben, von denen die eine $FABGH$ fest, die andere PQ innerhalb derselben drehbar ist. Auf der ersten seien 5, auf einem Hauptkreise sich in gleichen Intervallen folgende Punkte $F\ A\ B\ G\ H$ gegeben, auf der zweiten zwei Punkte P, Q, welche zunächst mit AB zusammenfallen (s. Fig. a). Dreht man jetzt die bewegliche Kugel um OA als Durchmesser durch einen Halbkreis, so kommt Q mit F zur Coincidenz (s. Fig. b.).

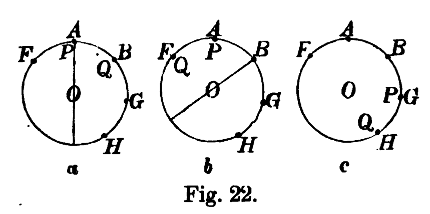


Fig. 22.

Dreht man die bewegliche Kugel aus dieser neuen Lage um die Axe OB durch einen Halbkreis, so kommt (s. Fig. c.) Q mit H, P mit G zur Coincidenz. In dieser Endlage ist aber PQ gegen seine Anfangslage um einen Bogen $AG = 2 . AB$ auf seinem Hauptkreise verschoben, und wir können die neue Lage der Punkte P, Q, wie sie durch die beiden Drehungen um A und B, die wir durch $[2A]$, $[2B]$ bezeichnen, hervorgebracht ist, auch mittels einer Drehung durch den Winkel $2 . AB$ um die Axe dieses Hauptkreises AB erzeugen. Da aber die Lage einer um ihren Mittelpunkt drehbaren Kugel durch zwei ihrer Punkte vollkommen bestimmt ist, so kann das Resultat $[2B] + [2A]$ der successiven Drehungen um $[2A]$ und $[2B]$, vollkommen durch jene einzige Drehung um die Axe von AB, die wir mit $[2 . AB]$ bezeichnen, ersetzt werden, so dass

$$A_2 A_3 + A_1 A_2 = A_1 A_3$$

mit Hilfe des Zeichens 0 für den Modul der Addition (s. (7) in §. 6) die andere:

$$A_3 A_1 + A_2 A_3 + A_1 A_2 = 0,$$

oder allgemeiner

$$A_n A_1 + A_{n-1} A_n + \ldots + A_2 A_3 + A_1 A_2 = 0$$

d. h. die sphärische Summe der Seiten eines sphärischen Polygons ist der Null gleich.

Versteht man unter $a_1, a_2, \ldots$ Hauptkreise, so erhält man aus der dualen Gleichung:

$$a_3 a_1 + a_2 a_3 + a_1 a_2 = 0$$

den Satz: die sphärische Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ist Null. Bekanntlich ist bei einem ebenen Dreieck die arithmetische Summe der Winkel Null.

Es ist von grossem Interesse eine häufig vorkommende Combination von Versoren

$$\alpha + \beta - \alpha$$

in ihrem Resultat zu betrachten. Es sei (Fig. 23) $\alpha = CA$, $\beta = BC$, so ist $\alpha + \beta = CA + BC = BA$. Dann mache man $AE = BA$, $AD = \alpha$ und hat dann:

$$\alpha + \beta - \alpha = BA - \alpha = AE - AD = AE + DA = DE = \gamma$$

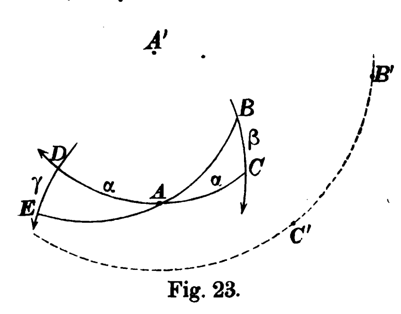


Fig. 23.

Der Versor γ macht mit α denselben Winkel, als der ihm an Länge gleiche β, ist aber entlang α um den Bogen 2α verschoben. Um dies Verhältniss klar herauszustellen, construiren wir die Pole A', B', C' der Kreise α, β, γ; weil die Winkel, welche β, γ mit α bilden, einander gleich sind, so müssen nach bekannten Sätzen auch die Bogen $B'A'$ und $C'A'$ als die jenen Winkeln polar entsprechenden, einander gleich sein, also $B'C'$ auf einem (im Allgemeinen nicht grössten) Kreise der Kugel liegen, dessen Pol A' ist. Um den Bogen β mit seinem Pole B' in den Bogen γ mit seinem Pole C' überzuführen, muss man das

System von β und B' um den Winkel 2α entlang α verschieben, oder um den Winkel 2α um A' drehen: der Versor

$$\gamma = \alpha + \beta - \alpha$$

wird daher aus β bei einer Drehung durch den Winkel 2α um die Axe von α erhalten.

Es ist hienach die an β auszuführende Drehung keine andere, als die, welche wir im vorigen §. durch $[2\alpha]$ bezeichnet haben. Um den Satz von der Zusammensetzung der Drehungen (S. 166) jetzt analytisch darzustellen, erinnere man sich, dass ohne Commutation, nach (16) des §. 6

$$-(\beta + \alpha) = -\alpha - \beta,$$

also nach dem associativen Principe:

$$(\beta + \alpha) + \delta - (\beta + \alpha) = \beta + (\alpha + \delta - \alpha) - \beta$$

d. h.: das Resultat der successiven Drehungen irgend eines Versors um $[2\alpha]$ und $[2\beta]$ ist gleich der um $[2\gamma]$, wenn $\gamma = \beta + \alpha$.

Es lässt der Satz von der Zusammensetzung der Drehungen noch einen anderen Ausdruck zu. Sei nämlich (Fig. 24) $2\alpha = AB$, $2\beta = BC$, und AB, BC in D, E halbirt, so ist $\alpha = DB$, $\beta = BE$ und $\beta + \alpha = BE + DB = DE$ und daher: $[2 . BE] + [2 . DB] = [2 . DE]$, oder $[BC] + [AB] = [2 . DE]$. Also: die successiven Rotationen $[AB]$, $[BC]$ durch zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind äquivalent einer Rotation $[2 . DE]$ durch das doppelte des Bogens, welcher die Mitten jener Seiten verbindet, wobei man sich immer zu erinnern hat, dass eine Rotation durch einen Bogen eine Rotation um seinen positiven Pol und einen dem Bogen gleichen Winkel bezeichnet.

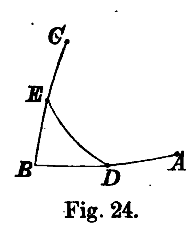


Fig. 24.

Es erhebt sich jetzt weiter die Frage, was das Resultat der Rotationen durch die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks ABC (und nicht wie oben durch die doppelten Seiten) sei. Um sie zu beantworten, bemerken wir zunächst, dass die Lage einer sphärischen Figur durch einen Punkt und die Richtung einer durch denselben gehenden, mit der Figur unabänderlich verbundenen Geraden vollständig bestimmt wird.

Denken wir uns nun mit einer Figur, welche jenen Rotationen durch die drei Seiten AB, BC, CA unterworfen werden soll, einen Punkt fest verbunden, der zunächst mit A zusammenfällt, so wird derselbe während der Rotationen die Seiten AB, BC, CA durchlaufen, also schliesslich zu A zurückgekehrt sein. Das Resultat jener drei Rotationen wird daher durch eine einfache Rotation um A als Pol ersetzt werden können. Um deren Grösse zu finden, denke man sich die Tangente u (Fig. 25) an den Kreis AB in A gelegt; diese wird bei der ersten Rotation durch AB nach B verschoben, und heisse in dieser Lage v; durch die zweite Rotation gelangt sie nach C und macht dabei denselben Winkel mit a als in B, so dass, wenn man ihre neue Lage mit w bezeichnet, $wa = va = ca$. Der Winkel mit b ist dann $wb = va + ab = va + ab$ und somit $wb = ca + ab$. Wird jetzt die Rotation durch CA vorgenommen, so gelangt w nach x, indem x dabei in A denselben Winkel mit b macht, wie w in C; so dass $xb = wb = ca + ab$. Die Lagendifferenz von u und x wird daher durch $ux = ub + bx = ub - (ca + ab)$ ausgedrückt; und da $ub = cb = - bc$, so hat man

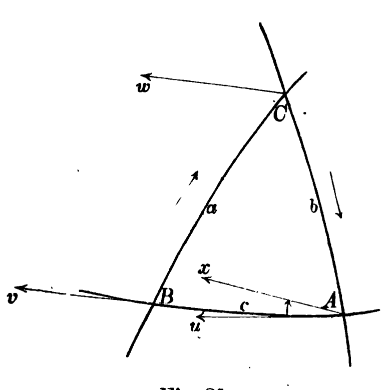


Fig. 25.

$$ux = -(ab + bc + ca).$$

Bezeichnet man die inneren Winkel des Dreiecks im gewöhnlichen Sinne mit A, B, C, und rechnet die Winkel auf der Kugel im Sinne ABC positiv, so hat man $ab = \pi - C$, $bc = \pi - A$, $ca = \pi - B$, und also

$$ux = A + B + C - \pi$$

dem sphärischen Excess, oder der Fläche des sphärischen Dreieckes gleich, und damit den schönen Satz:

Die successiven Rotationen um die Seiten AB, BC, CA eines sphärischen Dreieckes sind äquivalent einer

einfachen Rotation um den Pol A und einen Winkel, welcher der Fläche des sphärischen Dreieckes $A\,B\,C$ gleich ist, oder in Zeichen

$$[C\,A] + [B\,C] + [A\,B] = [2\omega],$$

wo ω ein Versor mit dem Winkel $\frac{1}{2}(A + B + C - \pi)$ und dem Pole A ist.

Hieraus lässt sich eine weitere Folgerung ziehen; sind nämlich $2\alpha = A\,B$, $2\beta = B\,C$, $2\gamma = C\,A$ jene Versoren, so drückt die Formel:

$$\gamma + \{\beta + (\alpha + \varepsilon - \alpha) - \beta\} - \gamma = (\gamma + \beta + \alpha) + \varepsilon - (\gamma + \beta + \alpha)$$

die successiven Rotationen des ε um $[2\alpha]$, $[2\beta]$, $[2\gamma]$ aus, deren Resultat durch $[2\delta]$ dargestellt werden kann, wo $\gamma + \beta + \alpha = \delta$. Nun ist aber nach vorstehendem Satze dieses Resultat $[2\delta] = [2\omega]$ und daher $\omega = \delta = \gamma + \beta + \alpha$, oder: die sphärische Summe der halben Seiten eines sphärischen Dreieckes

$$\tfrac{1}{2}\,C\,A + \tfrac{1}{2}\,B\,C + \tfrac{1}{2}\,A\,B,$$

gleich einem Versor, dessen Pol die erste Ecke A, und dessen Winkel der halben Fläche des sphärischen Dreieckes $A\,B\,C$ gleich ist.

Man bemerkt, dass die Multiplication oder Division mit ganzen Zahlen in einer Gleichung zwischen Versoren im Allgemeinen nicht gestattet ist. Denn während $2\gamma + 2\beta + 2\alpha = 0$ ist, so wird $\gamma + \beta + \alpha = \omega$. Es steht dies damit im Zusammenhange, dass die Addition nicht commutativ ist, also im Allgemeinen $(\gamma + \beta + \alpha) + (\gamma + \beta + \alpha)$ nicht auf $(2\gamma + 2\beta + 2\alpha)$ reducirt werden kann. —

Nach dem Satze S. 169 gibt die Verbindung eines Quadrantalversors (Punktes) D mit einem Versor α, $(D + \alpha - D)$ eine Drehung $[2D]$, d. h. aber eine Drehung um den Punkt D und durch seinen doppelten Winkel, nämlich einen Halbkreis. Ist (Fig. 26) $\alpha = A\,G$, so wird $D + \alpha - D = B\,H$, wo D die Mitte von $A\,B$ und die Winkel $G\,A\,D$ und $H\,B\,D$ einander gleich sind. Es wird daher $(D + \alpha - D)$ aus α erzeugt werden können durch eine Verschiebung entlang $A\,B$ und eine schliessliche Umkehrung seiner Richtung; und es unterscheidet

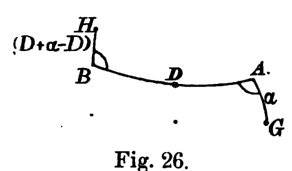


Fig. 26.

sich der Bogen, welcher durch eine an α vorgenommene Drehung $[AB]$ aus α erzeugt wird, von dem durch $[2D]$ erhaltenen, nur durch die entgegengesetzte Richtung.

Sind jetzt (Fig. 27) DEF die Mitten der Seiten eines sphärischen Dreiecks ABC, und denkt man sich einen Bogen α, dessen einer Endpunkt zunächst in A liegt, den drei Rotationen durch die Seiten $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ unterworfen, so wird er am Ende wieder mit demselben Endpunkte in A angelangt sein und das Resultat durch $(\omega + \alpha - \omega) = \beta$ ausgedrückt werden können, wo ω einen Winkel von der Grösse $\frac{1}{2}(A + B + C - \pi)$ bezeichnet, dessen Pol A ist.

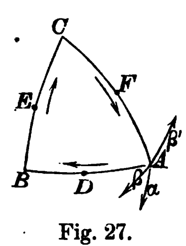


Fig. 27.

Denkt man sich ferner

$$F + \{E + (D + \alpha - D) - E\} - F = \beta'$$

gebildet, so erleidet dabei α dieselben Drehungen, dreht sich aber überdem in jeder Ecke noch einmal, im Ganzen also dreimal, und es wird daher β' die entgegengesetzte Lage als vorhin β einnehmen. Es ist nun vorstehender Ausdruck identisch

$$= (F + E + D) + \alpha - (F + D + E) = \beta',$$

und bezeichnet man den noch unbekannten Versor $F + E + D = \omega'$, so ist $\omega' + \alpha - \omega' = \beta'$ neben $\omega + \alpha - \omega = \beta$ und $[2\omega'] = [2\omega] + [3\pi]$; es stellt somit ω' einen Versor vor, dessen Pol A ist, und dessen doppelter Winkel dem doppelten Winkel von ω vermehrt um 3π, d. h. gleich $A + B + C + 2\pi$ ist, so dass der Winkel des Versor $\omega' = \frac{1}{2}(A + B + C) + \pi$. Man hat somit folgenden höchst werthvollen Satz:

Die Summe dreier Punkte $(F + E + D)$, welche nicht in einem Hauptkreise liegen, ist ein Versor, dessen Pol die Ecke A und dessen Winkel, $\frac{1}{2}(A + B + C) + \pi$, die Hälfte der Winkelsumme eines um DEF beschriebenen Dreiecks ABC ist, dessen Seiten AB, BC, CA in jenen Punkten gehälftet werden.

Die Summe $(F + E + D)$ kann noch auf eine ganz andere Weise geometrisch dargestellt werden. Beschreibt man nämlich (Fig. 28) um D als Pol einen Hauptkreis und nimmt auf ihm den

Quadranten KL, so ist $D = KL$. Macht man nun $F - E = EF = LM$, so ist $(F - E) + D = LM + KL = KM$. Nun ist nach (3) auf S. 162, $F - E = F + E + \pi$, also $F + E + D = KM + \pi$. Diese directe Construction von ω' kann nun mit vorstehender verglichen werden, und lehrt, dass der Pol dieses Versors $(KM + \pi)$ der Punkt A jenes um DEF beschriebenen Dreiecks ABC ist, und $(KM + \pi)$ an Grösse

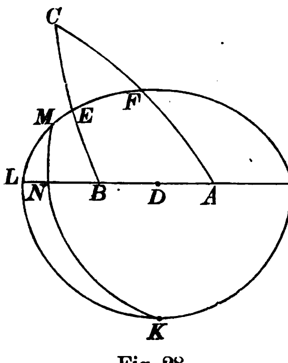


Fig. 28.

$$= \tfrac{1}{2}(A + B + C) + \pi,$$

so dass also

$$KM = \tfrac{1}{2}(A + B + C)$$

oder, wenn N den Durchschnitt von KM mit LD bedeutet, wo $KN = \frac{\pi}{2}$, $NM = \frac{1}{2}(A + B + C - \pi)$.

Man erhält hieraus, wenn man beachtet, dass $DL = \frac{\pi}{2} = AN$, also $LN = DA$, folgenden Satz:

Halbirt man die Seiten AB, BC, CA eines sphärischen Dreiecks in D, E, F, legt durch EF einen Kreis, welcher die verlängerte Seite AB in L schneidet, und construirt ein bei N rechtwinkliges Dreieck LNM mit $LM = EF$ als Hypotenuse, so wird die eine Kathete $LN = DA$, die andere NM aber ist das Maass für den halben Flächeninhalt des Dreieckes ABC.

Diese interessante Construction des Flächeninhaltes ist von Gudermann (Lehrb. d. niederen Sphärik, 1835. §. 106) zuerst gegeben und auf elementarem Wege erwiesen worden. Von dieser geht Hamilton (Lect. on Quatern. S. 218 u. ff.) aus, um die zunächst als Bogen KM dargestellte Summe $(F + E + D)$ zu deuten. Weniger sachgemäss ist die in den Elem. of Quatern. S. 331 u. ff. gegebene analytische Ableitung. —

Es lassen sich an vorstehende Sätze noch zahlreiche und für die Sphärik wichtige Bemerkungen knüpfen; wir beschränken uns auf die vorstehenden, die schon genügend die Fruchtbarkeit und Angemessenheit des Additionsbegriffes von Bogen dargethan haben werden Um kurz zu sein, habe ich darauf verzichtet, allen vorstehenden Sätzen die allgemeinste, sich auf Bogen jeder Grösse und jeder gegenseitigen Lage beziehende Form zu geben, deren Darstellung dem Leser überlassen bleiben mag.

§. 51.

Die Multiplication und Division von Einheitsvectoren.

Die in den vorstehenden §§. gelehrte Verknüpfung von Punkten A, B ... und Bogen AB, ... einer Kugel kann auch, wenn wir von der Kugel auf den Raum übergehen, als eine solche der Strecken OA, OB ... und der Versoren AOB, ... angesehen werden, welche durch Verbindung der Punkte der Kugel mit ihrem Mittelpunkte O entstehen. Als eine Addition der Strecken OA, OB, ... und der Versoren AOB, ... kann jene Verknüpfung, wie schon bemerkt, ihrer Incommutativität wegen, im Sinne des §. 7 nicht betrachtet werden. Ueberdem ist eine Addition von Strecken schon in §. 20 gegeben worden. Wir werden die sphärische Addition des §. 46 und 48 jetzt als Multiplication bezeichnen, indem wir uns den Nachweis, dass sie zu jener Addition der Strecken in distributiver Beziehung steht, auf §. 54 vorbehalten.

Bezeichnen wir die nach den Punkten A, B, C ... gerichteten Radien *) einer Kugel, deren Halbmesser die Einheit sei, durch die Buchstaben a_1, b_1, c_1 ... mit dem Index 1, so werden wir also die sphärische Addition und Subtraction der Punkte A, B, C ... durch eine Multiplication und Division der Strecken **) a_1, b_1, c_1 ... und den Modul 0 jener Addition durch den Modul 1 dieser Multiplication ersetzen. Mit dieser veränderten Bezeichnung nehmen dann die Sätze der §. 46 und 48 folgende Gestalt an:

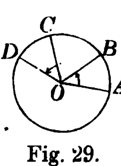


Fig. 29.

Unter dem Quotienten zweier Radien a_1, b_1 ***), welchen wir mit α_1 bezeichnen, versteht man einen Versor, nämlich das Dreieck AOB (Fig. 29) seinem Winkel AOB und seiner Ebene nach, d. h. man wird

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{d_1}{c_1}$$

setzen, wenn die gleichen Winkel $AOB = COD$ in einer Ebene liegen.

*) „Unit vectors", Einheitsvectoren.

**) Strecken nennt man nach Hamilton überhaupt „Vectoren".

***) „Radial" oder „Biradial".

Um zwei Quotienten α_1, β_1 mit einander zu multipliciren, wird man:

$$\beta_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad \alpha_1 = \frac{b_1}{a_1}$$

setzen, indem b_1 den Radius bezeichnet, welcher in dem Durchschnitt ihrer Ebene liegt, und hat dann:

$$\beta_1 \cdot \alpha_1 = \frac{c_1}{b_1} \cdot \frac{b_1}{a_1} = \frac{c_1}{a_1} = \gamma_1,$$

also das Product zweier, einem neuen Quotienten derselben Art gleich, so dass α_1, β_1, γ_1 eine dreiseitige Ecke bilden. Es ist dann $\beta_1 . \alpha_1$ von $\alpha_1 . \beta_1$ im Allgemeinen verschieden.

Einen Radius c_1 wird man (nach (1) §. 48) einem Quotienten zweier Radien n_1, m_1, welche sich in einer zu c_1 senkrechten Ebene befinden, und so auf einander senkrecht stehen, dass $MON = \frac{1}{2}\pi$ von c_1 aus in der einmal festgesetzten Richtung (von links nach rechts) erscheint, gleich setzen: *)

$$c_1 = \frac{n_1}{m_1}.$$

Der c_1 entgegengesetzte Radius c_1' muss, da nach (2) in §. 48 $c_1 . c'_1 = 1$ sein soll:

$$c_1' = \frac{1}{c_1}$$

gesetzt werden, da $c_1 \cdot \frac{1}{c_1} = 1$ ist. Es kann daher jedes Product von Punkten sofort in einen Quotienten verwandelt werden; denn es ist (vergl. (3) in §. 48):

$$b_1\, a_1 = b_1\, \frac{1}{a_1'} = \frac{b_1}{a_1'}.$$

Sind i_1, i_2, i_3 drei Radien, so dass $J_2\, O\, J_3$ von J_1, $J_3\, O\, J_1$ von J_2, $J_1\, O\, J_2$ von J_3 als ein positiver rechter Winkel erscheint, so ist nach (4) in §. 48:

$$i_1\, i_2 = i_3, \quad i_2\, i_3 = i_1, \quad i_3\, i_1 = i_2$$
$$i_2\, i_1 = i_3', \quad i_3\, i_2 = i_1', \quad i_1\, i_3 = i_2'$$

wenn i_1', i_2', i_3' die i_1, i_2, i_3 entgegengesetzten Radien sind, und es ist die associative Eigenschaft bei der Multiplication derselben in §. 48 nachgewiesen.

---

*) Es heisst c die „Axe“ des Quotienten, und letzterer selbst ein „Right-Quotient“.

Da auch in §. 49 die allgemeine associative Eigenschaft bei der Multiplication von Quotienten:

$$\alpha_1 (\beta_1 \gamma_1) = (\alpha_1 \beta_1) \gamma_1$$

erwiesen ist, so gelten für die Radien, und ihre Quotienten alle Multiplicationsregeln (1) bis (13) des §. 7 ohne Commutation.

§. 52.

Die Quaternionen und ihre Multiplication.

Haben wir hier eine Multiplication und Division von Strecken, welche alle von der Längeneinheit sind, kennen gelernt, so kann daraus mit Leichtigkeit eine solche Operation für alle Strecken im Raume, die man sich nach S. 75 auch von einem einzigen Punkte O ausgehend denken kann, hergeleitet werden, wenn man eine Strecke a allgemein durch

$$a = \mathfrak{a}\, a_1$$

darstellt, wo a_1 der ihre Richtung angebende Einheits-Radius ist, und $\mathfrak{a}$ eine reelle, positive oder negative Zahl, die Grösse, den Tensor der Strecke bezeichnet. Setzen wir dann fest, dass in jeder multiplicativen Verbindung diese Tensoren beliebig ihren Platz wechseln können, so wird ein Quotient zweier Strecken $a = \mathfrak{a}\, a_1$, $b = \mathfrak{b}\, b_1$

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \cdot \frac{a_1}{b_1}$$

aus zwei Factoren bestehen, deren ersten man den Tensor von α, letzteren aber den Versor nennt und

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \mathrm{T}\,\alpha, \quad \frac{a_1}{b_1} = \mathrm{U}\,\alpha$$

setzt. Ein solcher Quotient α hängt von dem Verhältniss der absoluten Längen beider Strecken, dem Tensor $\overline{OA} : \overline{OB}$, wenn man $a = OA$, $b = OB$ setzt, sowie von dem Winkel AOB (dem Versor) und dessen Ebene ab. Da die Lage der letzteren durch zwei Winkel bestimmt werden kann, so enthält α im Ganzen vier von einander unabhängige Elemente, die in α, β dieselben sein müssen, wenn $\alpha = \beta$ sein soll, und heisst daher eine

Quaternion. Sie drückt die Art*) eines Dreiecks AOB aus, insofern

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

wenn die Dreiecke AOB und COD (Fig. 30) gleichsinnig ähnlich, in Einer Ebene liegen. Eine Quaternion ist eine besondere geometrische Grösse**); nur der Quotient zweier aufeinander senkrechten Strecken $n:m$ stellt eine auf ihrer Ebene senkrechte Strecke***) c vor, deren Länge sich zu der von n verhält, wie die Längeneinheit zu der von m.

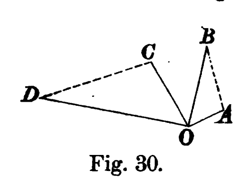


Fig. 30.

Es gelten nun ohne weiteres alle vorstehends für die Einheits-Radien und deren Quotienten (Versoren) gemachten Bemerkungen, auch für beliebige Strecken und die Quaternionen. Beachtet man, dass in der jetzigen Auffassung Strecken entgegengesetzter Richtung mit Tensoren von entgegengesetztem Zeichen versehen sind, so ist für Strecken von der Längeneinheit die zu c_1 entgegengesetzte Strecke $c'_1 = -c_1$ also:

$$\frac{1}{c_1} = -c_1$$

Diese Gleichung aber gibt, da $c_1 \frac{1}{c_1} = 1$ ist: $c_1(-c_1) = 1$ oder

$$c_1 c_1 = -1 \qquad (1)$$

Das Quadrat jeder Strecke von der Längeneinheit ist -1. Mittels dieser Bemerkung †) erhält man das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{i}_1 \dot{i}_1 = -1, & \dot{i}_2 \dot{i}_2 = -1, & \dot{i}_3 \dot{i}_3 = -1 \\ \dot{i}_1 \dot{i}_2 = +\dot{i}_3, & \dot{i}_2 \dot{i}_3 = +\dot{i}_1, & \dot{i}_3 \dot{i}_1 = +\dot{i}_2 \\ \dot{i}_2 \dot{i}_1 = -\dot{i}_3, & \dot{i}_3 \dot{i}_2 = -\dot{i}_1, & \dot{i}_1 \dot{i}_3 = -\dot{i}_2 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

worin $\dot{i}_1, \dot{i}_2, \dot{i}_3$ die Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystemes (vergl. Fig. 20) sind.

---

*) Die Species (im Sinne der älteren Mathematiker) des Dreieckes oder Biradiales AOB.

**) Man unterscheidet an ihr ihre Ebene, deren Lage auch durch eine auf ihr senkrechte Gerade, ihre „Axe" bezeichnet sein kann, und ihren Winkel, ihre „Amplitude".

***) Den „Index" der „Right Quaternion".

†) Vergl. (4) und (5) des §. 48. Ueberhaupt sieht man, dass wie der Modul der Multiplication $+1$ den Modul der Addition 0 oder 2π vertritt, jetzt an Stelle von π des §. 48 das Zeichen -1 tritt.

Wir haben schon in §. 48 auf die doppelte Bedeutung aufmerksam gemacht, welche den Quaternionen und Strecken — denn diese treten jetzt an Stelle der dortigen Versoren und Punkte — zukommt, als geometrische Gebilde einerseits, und andererseits als Operatoren, welche die Tendenz einer Drehung ausdrücken. Strecken erscheinen sowohl als geometrische Objecte, wie auch als Quadrantalversoren. In einem Producte $i_1\, i_2$ kann man den ersten Factor i_1 als Multiplicator ansehen, der eine Drehung des Multiplicandus, der Strecke i_2, um jenes i_1 als Axe und durch einen Quadranten, bewirkt, und also i_3 als Resultat liefert, u. s. w. So zeigt sich auch hier dieselbe Erscheinung, wie bei der gewöhnlichen Multiplication (s. S. 2), dass in einem Producte die Factoren bald als Operatoren, bald als Operanden anzusehen sind. Fasst man die Multiplication allgemein auf als eine Operation, welche als eine an dem Multiplicandus vorzunehmende der Multiplicator anzeigt, so verliert der Umstand einer incommutativen Multiplication überhaupt seine Paradoxie.

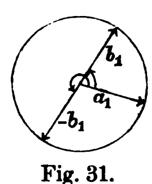


Fig. 31.

Wird in einem Versor $\frac{a_1}{b_1}$ eine Strecke mit der entgegengesetzten vertauscht, wodurch der Versor sein Zeichen ändert, so nimmt (Fig. 31) der Winkel um π zu, und umgekehrt: Nimmt der Winkel einer Quaternion um π zu, so ändert sie ihr Zeichen.

Mit Hilfe dieser Bemerkungen lässt sich der S. 172 gegebene Satz über die Summe dreier Punkte so darstellen: Das Product dreier Einheitsvectoren $f_1\, e_1\, d_1$ ist ein Versor, dessen Pol die Ecke A jenes Dreiecks und dessen Winkel $\frac{1}{2}(A + B + C) + \pi$ ist. Nennt man η eine Quaternion mit diesem Pole und dem Winkel $\frac{1}{2}(A + B + C)$, so ist $f_1\, e_1\, d_1 = -\eta$ oder:

$$\frac{f_1}{e_1}\, d_1 = \eta$$

und es ist somit das Product $-\eta$, oder die vierte geometrische Proportionale η dreier Einheitsvectoren eine Quaternion von dem angegebenen geometrischen Charakter.

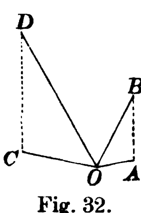


Fig. 32.

Zwei Quaternionen nennt man „conjugirt“, wenn die sie darstellenden Dreiecke in einer Ebene entgegengesetzt ähnlich sind, und bezeichnet sie mit α und K α. Ist dann (Fig. 32)

$$\alpha = \frac{OA}{OB}, \quad \mathrm{K}\,\alpha = \frac{OC}{OD}$$

so ist $\angle BOA = \angle COD$ und:

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OC} : \overline{OD}.$$

Die Tensoren zweier conjugirten Quaternionen sind also einander gleich, ihre Winkel entgegengesetzt.

Stehen OA, OB auf einander senkrecht, so ist α eine Strecke, $\mathrm{K}\,\alpha$ die entgegengesetzt gerichtete, also für Strecken

$$\mathrm{K}\,a = -a. \tag{3}$$

Sind a_1, b_1 Strecken von der Längeneinheit, so ist

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad \mathrm{K}\,\alpha_1 = \frac{b_1}{a_1}, \tag{4}$$

da man allgemein die Richtungen OD mit OA, OC mit OB zur Coincidenz bringen kann, ohne den Werth des Versor $\mathrm{K}\,\alpha_1$ zu ändern und man erhält durch Multiplication:

$$\alpha_1\,\mathrm{K}\,\alpha_1 = 1.$$

Ist eine Quaternion $\alpha = \mathfrak{a}\,\alpha_1$, wo α_1 einen solchen Versor bezeichnet, $\mathfrak{a}$ ihren Tensor, so ist $\mathrm{K}\,\alpha = \mathfrak{a}\,\mathrm{K}\,\alpha_1$ also:

$$\alpha\,\mathrm{K}\,\alpha = \mathfrak{a}^2 = (\mathrm{T}\,\alpha)^2 \tag{5}$$

Sind zwei Quaternionen $\alpha = \mathfrak{a}\,\alpha_1$, $\beta = \mathfrak{b}\,\beta_1$ gegeben, wo α_1, β_1 Versoren sind, so ist

$$\mathrm{K}\,\alpha = \mathfrak{a}\,\mathrm{K}\,\alpha_1, \quad \mathrm{K}\,\beta = \mathfrak{b}\,\mathrm{K}\,\beta_1,$$

$$\alpha\,\beta = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,.\,\alpha_1\,\beta_1, \quad \mathrm{K}\,\beta\,.\,\mathrm{K}\,\alpha = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,.\,\mathrm{K}\,\beta_1\,.\,\mathrm{K}\,\alpha_1$$

Setzt man nun

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad \beta_1 = \frac{b_1}{c_1}, \quad \text{so ist } \alpha_1\,\beta_1 = \frac{a_1}{c_1},$$

wo a_1, b_1, c_1 Strecken von der Länge 1 sind. Es ist aber nach (4)

$$\mathrm{K}\,\alpha_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad \mathrm{K}\,\beta_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad \text{also } \mathrm{K}\,\beta_1\,\mathrm{K}\,\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1}\,\frac{b_1}{a_1} = \frac{c_1}{a_1}$$

und somit:

$$\mathrm{K}\,(\alpha_1\,\beta_1) = \mathrm{K}\,\beta_1\,.\,\mathrm{K}\,\alpha_1$$

oder allgemein:

$$\mathrm{K}\,(\alpha\,\beta) = \mathrm{K}\,\beta\,.\,\mathrm{K}\,\alpha \tag{6}$$

Für Strecken hat man, da $\mathrm{K}\,a = -a$, $\mathrm{K}\,b = -b$, hieraus

$$\mathrm{K}\,(a\,b) = b\,a. \tag{7}$$

Unter der zu α reciproken Quaternion, die man mit $\frac{1}{\alpha}$ oder α^{-1} bezeichnet, und durch

$$\alpha\,.\,\frac{1}{\alpha} = 1 \text{ oder } \alpha\,.\,\alpha^{-1} = 1$$

definirt wird, hat man, wenn

$$\alpha = \frac{a}{b} \text{ gesetzt wird}, \frac{1}{\alpha} = \frac{b}{a}$$

zu verstehen, da dann jene Gleichung erfüllt ist.

Bei einem aus Einheitsstrecken gebildeten Versor α_1 hat man nach (4)

$$\frac{1}{\alpha_1} = \mathrm{K}\,\alpha_1$$

und somit

$$\frac{1}{\mathfrak{a}\,\alpha_1} = \frac{1}{\mathfrak{a}^2} \cdot \mathfrak{a}\,\mathrm{K}\,\alpha_1.$$

Ist $\alpha = \mathfrak{a}\,\alpha_1$ also eine beliebige Quaternion, so ist:

$$\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{1}{\mathrm{T}\,\alpha}\right)^2 \mathrm{K}\,\alpha. \tag{8}$$

§. 53.

Addition der Quaternionen.

Nehmen wir die in §. 20 gelehrte Addition der Strecken wieder auf, so wird das Princip der Permanenz uns veranlassen, das distributive Princip, dem man (vergl. (24) in §. 7) die Form:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \tag{1}$$

geben kann, in Bezug auf den jetzigen Begriff der Quotienten von Strecken vorauszusetzen. Dann wird durch Gleichung (1) die Definition der Summe zweier Quaternionen, α, β, die man jederzeit auf gemeinschaftlichen Nenner bringen kann, indem man mit c eine Strecke ihrer Durchschnittslinie bezeichnet und:

$$\alpha = \frac{a}{c}, \ \beta = \frac{b}{c}$$

setzt, unzweideutig gegeben sein.

Von Wichtigkeit ist der Fall, dass α eine reelle Zahl, also der Quotient zweier in einer beliebigen Richtung zusammenfallender Vectoren, β aber eine Strecke ist, welche als Quotient zweier zu einander senkrechter Vectoren betrachtet werden kann. Nimmt man dann c senkrecht auf β, sonst aber willkührlich, so lassen sich a, b den beiden Bedingungen entsprechend bestimmen, und

es ist die Summe einer reellen Zahl und eines Vectors daher eine Quaternion $\frac{a+b}{c}$.

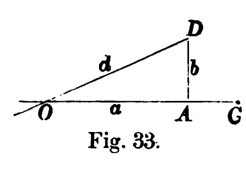


Fig. 33.

Ist ferner eine Quaternion (Fig. 33)

$$\gamma = \frac{d}{c} = \frac{OD}{OC}$$

gegeben, so projicire man OD auf c, und nenne $OA = a$, $AD = b$; dann ist $d = a + b$ und daher:

$$\gamma = \frac{d}{c} = \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Hierin aber ist $\frac{a}{c}$ eine reelle Zahl, $\frac{b}{c}$ der Quotient zweier aufeinander senkrechter Strecken, also selbst ein Vector, und somit kann jede Quaternion auf eine einzige Weise in die Summe einer reellen Zahl und eines Vectors zerlegt werden. Nennt man jenen ersten Theil den Scalartheil *) der Quaternion, den letzteren den Vectortheil **) und bezeichnet sie durch $\mathrm{S}\gamma$, $\mathrm{V}\gamma$, so ist danach:

$$\gamma = \mathrm{S}\gamma + \mathrm{V}\gamma. \tag{2}$$

Sind $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$ die reellen Grössen jener Strecken d, c, und ist p_{cd} ein auf der positiven Seite der Ebene $c\,d$ errichteter Einheitsvector, so ist:

$$\mathrm{S}\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}} \cos(c\,d), \quad \mathrm{V}\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}\, p_{cd} \sin(c\,d) \tag{3}$$

also

$$\gamma = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}} (\cos c\,d + p_{cd} \sin c\,d), \tag{4}$$

wo

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}} = \mathrm{T}\gamma, \quad \cos c\,d + p_{cd} \sin c\,d = \mathrm{U}\gamma$$

und somit für den Versor eine wichtige Deutung gewonnen ist.

Bezeichnet man eine auf den Durchschnittslinien irgend zweier Quaternionen γ, γ' liegende Strecke mit c, so kann man jederzeit

*) Von „Scala“, weil er die Längen auf einer solchen misst.

**) Auch „Right Part“.

$\gamma = \frac{d}{c}$, $\gamma' = \frac{d'}{c}$ setzen und nennt man a, b, a', b' die durch Projection von d, d' auf c entstehenden Stücke, so ist nach der Definitionsgleichung (1):

$$\gamma + \gamma' = \frac{(a+b)+(a'+b')}{c} = \frac{(a+a')+(b+b')}{c} = \frac{a+a'}{c} + \frac{b+b'}{c}.$$

Da $(a + a')$ mit c in der Richtung zusammenfällt, $(b + b')$ aber ebenso als seine beiden Summanden auf c senkrecht steht, so ist

$$\frac{a+a'}{c} = \mathrm{S}(\gamma+\gamma'), \quad \frac{b+b'}{c} = \mathrm{V}(\gamma+\gamma').$$

Ferner aber ist

$$\frac{a+a'}{c} = \frac{a}{c} + \frac{a'}{c}, \quad \frac{b+b'}{c} = \frac{b}{c} + \frac{b'}{c},$$

also

$$\mathrm{S}(\gamma+\gamma') = \mathrm{S}\gamma + \mathrm{S}\gamma', \quad \mathrm{V}(\gamma+\gamma') = \mathrm{V}\gamma + \mathrm{V}\gamma'.$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}(\gamma+\gamma')+\gamma'' &= \mathrm{S}[(\gamma+\gamma')+\gamma''] + \mathrm{V}[(\gamma+\gamma')+\gamma''] \\ &= \mathrm{S}(\gamma+\gamma') + \mathrm{S}\gamma'' + \mathrm{V}(\gamma+\gamma') + \mathrm{V}\gamma'' \\ &= \mathrm{S}\gamma + \mathrm{S}\gamma' + \mathrm{S}\gamma'' + \mathrm{V}\gamma + \mathrm{V}\gamma' + \mathrm{V}\gamma'',\end{aligned}$$

da für Scalaren und Vectoren das associative Gesetz nach allen früheren Festsetzungen gilt; und man findet somit:

$$(\gamma+\gamma')+\gamma'' = \gamma + (\gamma'+\gamma'') = \gamma+\gamma'+\gamma''.$$

Die Addition der Quaternionen ist also eine associative Operation, deren Commutativität ebenfalls leicht erkannt wird.

Da die zu γ conjugirte Quaternion $\mathrm{K}\gamma$ durch ein in derselben Ebene als γ liegendes, entgegengesetzt ähnliches Dreieck repräsentirt wird, so ist ihr Scalar derselbe als der von γ, ihr Vector aber entgegengesetzt, und daher

$$\mathrm{K}\gamma = \mathrm{S}\gamma - \mathrm{V}\gamma. \tag{5}$$

Dass

$$\mathrm{K}(\alpha+\beta) = \mathrm{K}\alpha + \mathrm{K}\beta, \tag{6}$$

also K den distributiven Charakter hat, geht aus den entsprechenden Eigenschaften der Symbole S und V unmittelbar hervor, da

$$\mathrm{K}\alpha = \mathrm{S}\alpha - \mathrm{V}\alpha, \quad \mathrm{K}\beta = \mathrm{S}\beta - \mathrm{V}\beta$$

und

$$\mathrm{K}(\alpha+\beta) = \mathrm{S}(\alpha+\beta) - \mathrm{V}(\alpha+\beta) = \mathrm{S}\alpha + \mathrm{S}\beta - \mathrm{V}\alpha - \mathrm{V}\beta.$$

§. 54.

Die distributive Multiplication der Quaternionen.

In (1) des vorigen §. ist das distributive Princip bei der Multiplication von Strecken

$$(a + b)\, c = a\, c + b\, c$$

angenommen worden. Die andere Gleichung

$$c\,(a + b) = c\, a + c\, b$$

kann aus

$$\mathrm{K}\,[(a + b)\, c] = \mathrm{K}\,[a\, b + a\, c] = \mathrm{K}\,(a\, c) + \mathrm{K}\,(a\, b)$$

sofort geschlossen werden, wenn man beachtet, dass nach (7) in §. 52 bei Streckenproducten $\mathrm{K}\,(a\, c) = c\, a$, $\mathrm{K}\,(a\, b) = b\, a$, $\mathrm{K}\,[(a + b)\, c] = c\,(a + b)$ ist. Damit ist denn das allgemeine distributive Princip für Strecken

$$(a + b)\,(c + d) = a\, c + b\, c + a\, d + b\, d$$

hergestellt. Aus ihm ist der Begriff der Addition von Quaternionen hergeleitet. Da ferner die Multiplication der Quaternionen in §. 52 schon vollkommen bestimmt ist, so kann eine weitere Annahme nicht gemacht werden und es muss das distributive Princip bei der Operation mit Quaternionen erwiesen werden:

Man hat nach den Grundgesetzen der Multiplication in §. 7:

$$\frac{a + b}{c}\, \frac{c}{d} = \frac{a + b}{d}$$

also

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \frac{c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a}{c}\, \frac{c}{d} + \frac{b}{c}\, \frac{c}{d}$$

woraus man den geometrischen Satz erhält:

Sind 3 Quaternionen α, β, γ gegeben, deren Ebenen sich in einer Geraden schneiden, auf der man c willkührlich annimmt, und setzt man

$$\alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = \frac{b}{c}, \quad \gamma = \frac{c}{d},$$

so hat man

$$(\alpha + \beta)\, \gamma = \alpha\, \gamma + \beta\, \gamma. \qquad (1)$$

Da ferner nach (6) in §. 52 und (6) in §. 53:

$$\mathrm{K}\,[(\alpha + \beta)\, \gamma] = \mathrm{K}\,\gamma\,.\,\mathrm{K}\,(\alpha + \beta) = \mathrm{K}\,\gamma\,.\,(\mathrm{K}\,\alpha + \mathrm{K}\,\beta)$$

und nach der eben erwiesenen Gleichung (1) $K[(\alpha + \beta)\gamma] =$

$$K(\alpha\gamma + \beta\gamma) = K.\alpha\gamma + K.\beta\gamma = K\gamma.K\alpha + K\gamma.K\beta$$

ist, so hat man auch

$$K\gamma.(K\alpha + K\beta) = K\gamma.K\alpha + K\gamma.K\beta,$$

in welcher Formel wieder $K\alpha$, $K\beta$, $K\gamma$ als ganz willkührliche Quaternionen α', β', γ', deren Ebenen eine Gerade gemein haben, angesehen werden können, so dass man die Gleichung

$$\gamma'(\alpha' + \beta') = \gamma'\alpha' + \gamma'\beta' \qquad (2)$$

erhält, welche mit (1) zusammen das vollständige distributive Princip bei der Verknüpfung von solchen Quaternionen, deren Ebenen sich in einer Geraden schneiden, ausmacht.

Nichts ist leichter, als hieraus das allgemeine distributive Princip abzuleiten. Setzt man $\alpha = S\varepsilon$, $\beta = V\varepsilon$, $\gamma = \zeta$, so können diese drei speciellen Quaternionen α, β, γ als sich in einer Geraden schneidend angesehen werden, da die Lage von α gänzlich unbestimmt ist. Man hat also nach (1):

$$(S\varepsilon + V\varepsilon)\zeta = S\varepsilon.\zeta + V\varepsilon.\zeta$$

und ebenso nach (2):

$$S\varepsilon(S\zeta + V\zeta) = S\varepsilon.S\zeta + S\varepsilon.V\zeta$$
$$V\varepsilon(S\zeta + V\zeta) = V\varepsilon.S\zeta + V\varepsilon.V\zeta$$

also

$$\varepsilon.\zeta = (S\varepsilon + V\varepsilon)(S\zeta + V\zeta) = S\varepsilon.S\zeta + S\varepsilon.V\zeta + S\zeta.V\varepsilon + V\varepsilon.V\zeta. \quad (3)$$

Ist nun $\varepsilon = \alpha + \beta$, $\zeta = \gamma + \delta$, so ist hienach:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = (S\alpha + S\beta)(S\gamma + S\delta)$$
$$+ (S\alpha + S\beta)(V\gamma + V\delta) + (S\gamma + S\delta)(V\alpha + V\beta) + (V\alpha + V\beta)(V\gamma + V\delta)$$

Für alle diese einzelnen Glieder ist aber das distributive Princip schon in (1) und (2) nachgewiesen, und man hat daher:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = {} & S\alpha\,S\gamma + S\beta\,S\gamma + S\alpha\,S\delta + S\beta\,S\delta \\ & + S\alpha\,V\gamma + S\beta\,V\gamma + S\alpha\,V\delta + S\beta\,V\delta \\ & + S\gamma\,V\alpha + S\gamma\,V\beta + S\delta\,V\alpha + S\delta\,V\beta \\ & + V\alpha\,V\gamma + V\beta\,V\gamma + V\alpha\,V\delta + V\beta\,V\delta\end{aligned}$$

Addirt man hier die Verticalcolonnen, so findet man nach (3) die Summe

$$=(S\alpha+V\alpha)(S\gamma+V\gamma)+(S\beta+V\beta)(S\gamma+V\gamma)+(S\alpha+V\alpha)(S\delta+V\delta)$$
$$+(S\beta+V\beta)(S\delta+V\delta),$$

und erhält somit:

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta,$$

also das distributive Princip für 4 Quaternionen in beliebigen Ebenen.

Eine Durchsicht der letzten zwei §§. lehrt, dass in ihnen von der früher unabhängig vom distributiven Principe nachgewiesenen Associativität in einem Producte von Strecken oder Quaternionen kein Gebrauch gemacht ist. Es leuchtet ein, dass aus dem distributiven Principe in Gemeinschaft mit der selbstständig abgeleiteten Associativität des Productes von drei aufeinander senkrechten Vectoren i_1, i_2, i_3 (s. S. 163) das allgemeine associative Princip ohne Weiteres gefolgert werden könnte, wenn man die Quaternionen in der im folgenden §. gegebenen Weise linear durch i_1, i_2, i_3 darstellt.

§. 55.

Die Quaternionen als Zahlen.

Haben wir nun so erkannt, dass es ein System geometrischer Operationen in Bezug auf Strecken und gewisse Verknüpfungen derselben, die Quaternionen gibt, welches vollkommen den in §. 28 aufgestellten Bedingungen, die sich auf die Operationen an complexen Zahlen beziehen, genügt, so sind wir berechtigt, die Strecken und Quaternionen als complexe Zahlen anzusehen, und zwar sind die Strecken, wie schon in §. 32 bemerkt, von der Form

$$a=\mathfrak{a}_1 i_1+\mathfrak{a}_2 i_2+\mathfrak{a}_3 i_3,$$

wenn i_1, i_2, i_3 Strecken von der Längeneinheit auf den Axen eines orthogonalen Systemes darstellen, und die Quaternionen $\alpha = S\alpha + V\alpha$ von der Form:

$$\alpha=\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1 i_1+\mathfrak{a}_2 i_2+\mathfrak{a}_3 i_3; \qquad (1)$$

die Producte der Strecken i_1, i_2, i_3 haben die mehrfach angegebenen Werthe.

Wünscht man einen directen Beweis dafür, dass jeder complexen Zahl von der angegebenen Form (1) nur eine geometrische Quaternion (oder untereinander in unserem Sinne gleiche) und umgekehrt entspricht, so hat man zu zeigen, dass wenn für die Vectoren a, b, c, d im Sinne des VIII. Abschnittes die Gleichung:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

gilt, auch die den beiden Quotienten entsprechenden geometrischen Gebilde (Quaternionen) im Sinne des §. 52 gleich sind, und umgekehrt. Nun ist nach den Multiplicationsregeln:

$$\frac{a}{b} = + \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3}{\mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{b}_2^2 + \mathfrak{b}_3^2}$$
$$- \frac{(\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_2) i_1 + (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_3) i_2 + (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1) i_3}{\mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{b}_2^2 + \mathfrak{b}_3^2}.$$

Soll dies dem Quotienten $\frac{c}{d}$ gleich sein, so muss, wenn $\mathfrak{a} = \overline{OA}$, $\mathfrak{b} = \overline{OB}$, $\mathfrak{c} = \overline{OC}$, $\mathfrak{d} = \overline{OD}$ gesetzt wird, in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} (\cos a_1 \cos b_1 + \cos a_2 \cos b_2 + \cos a_3 \cos b_3) =$$
$$\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}} (\cos c_1 \cos d_1 + \cos c_2 \cos d_2 + \cos c_3 \cos d_3),$$
$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} (\cos a_2 \cos b_3 - \cos a_3 \cos b_2) = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}} (\cos c_2 \cos d_3 - \cos c_3 \cos d_2)$$

u. s. f. oder nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \cos (a\, b) = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}} \cos (c\, d)$$
$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \sin (a\, b) \cos (a\, b,\, i_1\, i_2) = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}} \sin (c\, d) \cos (c\, d,\, i_1\, i_2)$$

u. s. f. also, wie man aus diesen vier Gleichungen leicht findet:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}, \quad (a\, b) = (c\, d), \quad (a\, b,\, i_1\, i_2) = (c\, d,\, i_1\, i_2)$$

sein, und in der That sind unter diesen Bedingungen zwei Quaternionen gleich gesetzt worden.

Die Quaternionen werden hienach in vollkommen adäquater Weise durch die in §. 42 definirten formalen complexen Zahlen dargestellt, und zwar werden reelle geometrische Gebilde nur solchen Zahlen entsprechen, deren Coefficienten reelle Zahlen sind. Diejenigen Quaternionen, deren Coefficienten gewöhnliche complexe Zahlen sind, wie dies im VIII. Abschnitt allgemein angenommen wurde, haben kein anschauliches Substrat, und spielen in der mit Hilfe der Quaternionen durchgeführten Theorie der Curven dieselbe Rolle, als in der analytischen Geometrie die gewöhnlichen complexen

Zahlen, welche von dem Princip der Permanenz gefordert, aber in keinerlei Weise eigentlich geometrisch dargestellt werden können.

Mit Rücksicht hierauf dürfen wir denn die sämmtlichen im VIII. Abschnitt abgeleiteten Sätze sofort für die geometrischen Quaternionen in Anspruch nehmen.

Es mag noch bemerkt werden, dass neben Form (1) der Quaternionen noch die andere, vergl. (4) in §. 53:

$$\alpha = \mathfrak{a}\,(\cos\varphi + \iota \sin\varphi) \qquad (2)$$

besteht, wo $\mathfrak{a}$ den Tensor, φ den Winkel der Quaternion und ι einen auf ihrer Ebene senkrechten Einheitsvector, die Axe derselben vorstellt. Ist Θ der Winkel dieses Vectors mit der i_1 Axe, ψ der Winkel der durch ι und i_1 gelegten Ebene mit der Ebene $i_1\,i_2$, so ist

$$\iota = i_1 \cos\Theta + i_2 \sin\Theta \cos\psi + i_3 \sin\Theta \sin\psi$$

also, mit (1) verglichen:

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cos\varphi \qquad \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \sin\varphi \cos\Theta$$

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a} \sin\varphi \sin\Theta \cos\psi \qquad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a} \sin\varphi \sin\Theta \sin\psi.$$

Hiemit ist die vollständige Grundlage für die Operation mit Quaternionen, mag man diese nun als complexe Zahlen oder als geometrische Gebilde auffassen, gewonnen. Es bleibt uns nur noch übrig, an einigen Beispielen darzuthun, wie fruchtbar der Quaternionencalcul für die Geometrie ist, und auf welche naturgemässe Weise geometrische Sätze durch ihn dargestellt werden.

§. 56.

Die Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie.

In analoger Weise, wie in der Gleichung

$$O\,C - O\,A = (O\,C - O\,B) + (O\,B - O\,A)$$

die ganze ebene Trigonometrie enthalten war, wenn man diese Strecken durch gemeine complexe Zahlen darstellte (vergl. §. 23), enthält jetzt die Identität

$$\frac{O\,C}{O\,A} = \frac{O\,C}{O\,B} \cdot \frac{O\,B}{O\,A} \qquad (1)$$

die ganze sphärische Trigonometrie, wenn die Streckenquotienten als Quaternionen angesehen werden. Nehmen wir A, B, C auf

einer Kugel mit dem Radius 1 an, so dass der Tensor der Strecken OA, OB, OC, die Einheit ist, so findet man nach (4) in § 53:

$$\frac{OC}{OA} = \cos AC + OB' . \sin AC$$

wo B' der positive Pol des Kreises AC ist, und also OB' auf der Ebene der Quaternion AOC senkrecht steht. Somit wird jene Gleichung:

$$\cos AC + OB' . \sin AC = (\cos BC + OA' . \sin BC)(\cos AB + OC' . \sin AB)$$
$$= \cos BC . \cos AB + OA' . \sin BC . \cos AB + OC' . \sin AB \cos BC$$
$$+ OA' . OC' \sin AB \sin BC$$

Nun ist

$$OA' . OC' = -\frac{OA'}{OC'} = -(\cos C'A' + OB . \sin C'A');$$

denn B ist der Pol des Kreises $C'A'$, da er der Durchschnitt der beiden Kreise AB, BC ist, deren Pole C', A' sind (s. Fig. 35). Bezeichnen wir den positiven Sinn der Hauptkreise AB, BC, CA mit c, a, b, so hat man $C'A' = ca$, u. s. f., also:

$$OA' . OC' = -\cos ca - OB . \sin ca$$

Der Scalartheil obiger Gleichung ist daher:

$$\cos AC = \cos BC \cos AB - \sin BC . \sin AB . \cos ca \quad (2)$$

und das ist die erste Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie.

Der Vectortheil aber:

$$OB' . \sin AC = OA' . \sin BC . \cos AB$$
$$+ OC' . \sin AB . \cos BC - OB . \sin BC . \sin AB . \sin ca \quad (3)$$

enthält noch drei Gleichungen in sich, welche man auf sehr verschiedenartige Weise entwickeln kann. Dividirt man etwa beiderseits mit OA', so wird, weil $A'B' = ab$, $A'C' = ac$:

$$\frac{OB'}{OA'} = \cos ab + OC . \sin ab$$

$$\frac{OC'}{OA'} = \cos ac + OB . \sin ac$$

während $OB : OA'$ ein Vector ist, da OB, OA' zwei auf einander senkrechte Strecken sind. Nach dieser Division giebt der Scalartheil von (3):

$$\sin AC \cos ab = \sin BC . \cos AB + \sin AB . \cos BC . \cos ac \quad (4)$$

die zweite Fundamentalgleichung, während der Vectortheil:

$$OC . \sin AC . \sin ab = OB . \sin AB . \cos BC . \sin ac$$
$$- \frac{OB}{OA'} \sin BC . \sin AB . \sin ca.$$

Nun ist, da OA', OB aufeinander senkrecht stehen:

$$- \frac{OB}{OA'} = OB . OA' = - OA' . OB$$

und man hat somit aus voriger Gleichung, wenn sie durch OB dividirt wird

$$\frac{OC}{OB} \cdot \sin AC . \sin ab = \sin AB . \cos BC . \sin ac$$
$$- OA' . \sin BC . \sin AB . \sin ca$$

Beachtet man nun, dass

$$\frac{OC}{OB} = \cos BC + OA' . \sin BC$$

so findet man durch Identificirung der Scalartheile ebensowohl als der Vectortheile:

$$\sin AC . \sin ab = \sin AB . \sin ac \quad (5)$$

welche Gleichung mit (2) und (4) zusammen das fundamentale System der Trigonometrie bildet.

Die Gleichungen sind hier in der allgemeinen Form erhalten, deren man sich seit Möbius bedient. Will man aus ihnen die gewöhnlichen Formeln erhalten, so lege man den 3 Seiten einen bestimmten Sinn bei, etwa so, dass man AB, BC, CA im positiven Sinne durchläuft, wenn man die Fläche des Dreiecks so umläuft, dass sie immer zur Rechten bleibt. Ist dann der positive Sinn, in dem die Winkel gezählt werden, der von links nach rechts (s. Fig. 34), und sind A, B, C die absoluten, rechts im Innern der Fläche liegenden Winkel, so ist:

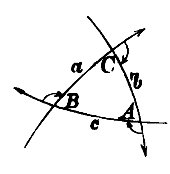


Fig. 34.

$$ab = \pi - C, \quad bc = \pi - A, \quad ca = \pi - B.$$

Setzt man nun noch zur Abkürzung die absoluten Werthe:

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c$$

so erhält man aus (2), (4), (5) die gewöhnlichen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \cos b &= \cos a . \cos c + \sin a . \sin c . \cos B \\ \cos C . \sin b &= \sin a . \cos c - \cos a . \sin c . \cos B \\ \sin C . \sin b &= \sin B . \sin c \end{aligned}\right\}$$

Jene allgemeinen Formeln haben, von allem anderen abgesehen, den grossen Vortheil, dass sich die Dualität in ihnen auf das Deutlichste ausspricht. Nennen wir, wie bisher A', B', C' die Pole von a, b, c, und ferner (s. Fig. 35) a', b', c' die Polaren von A, B, C, so kann in den Formeln (2), (4), (5) $AB = a'b'$, und $ab = A'B'$, also statt A, B, C, a, b, c ohne Weiteres a', b', c', A', B', C' gesetzt werden. Lässt man dann die Accente weg, so erhält man die zu jenen dualen Formeln:

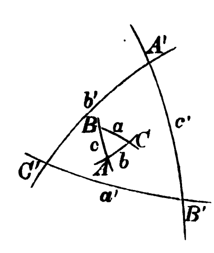


Fig. 35.

$$\cos ac = \cos bc \cos ab - \sin bc . \sin ab . \cos CA$$
$$\cos AB \sin ac = \sin bc \cos ab + \sin ab . \cos bc . \cos AC$$

während (5) unverändert bleibt. Bringt man letztere Formeln wieder auf die gewöhnliche Gestalt, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}\cos B &= -\cos A . \cos C + \sin A . \sin C . \cos b \\ \cos c . \sin B &= -\sin A . \cos C - \sin C . \cos A . \cos b\end{aligned}\right\}$$

Die Scalartheile der Gleichungen, auf welche man stösst, geben direct eine Formel der Trigonometrie, die Vectorentheile aber ebenfalls einen geometrischen Satz. Um z. B. (3) zu deuten, wollen wir zunächst, wie es eben angegeben wurde, die Winkel und Bogen durch die dual entsprechenden Gebilde ersetzen, und schliesslich die Accente weglassen. Dann kann diese Formel:

$$\begin{aligned}OB . \sin ac = OA . \sin bc . \cos ab + OC . \sin ab . \cos bc \\ - OB' . \sin ab . \sin bc . \sin CA \quad (6)\end{aligned}$$

geschrieben werden und bezieht sich so auf ein Dreieck A, B, C, dessen Seiten a, b, c und wo B' der Pol von b ist. Diese Gleichung aber enthält den Satz:

Verbindet man die Ecken irgend eines sphärischen Dreieckes A, B, C mit dem Kugelmittelpunkte O, und trägt auf diesen resp. die Strecken $\sin bc . \cos ab$, $-\sin ac$, $\sin ab . \cos bc$, ab, so hat das aus diesen drei Strecken zu bildende Parallelepipedum eine Diagonale von der Länge $\sin ab . \sin bc . \sin CA$, welche senkrecht auf der Ebene COA steht.

Dividirt man (6) durch die beliebige Strecke OP, so gibt der Scalartheil:

$$\begin{aligned}\cos BP . \sin ac = \cos AP . \sin bc . \cos ab + \cos CP . \sin ab . \cos bc \\ - \cos B'P . \sin ab . \sin bc . \sin CA \quad (7)\end{aligned}$$

wo $B'P = B'Q + QP = \frac{1}{2}\pi + QP$ gesetzt werden kann, wenn Q den Fusspunkt eines von P auf b gefällten Perpendikels be-

zeichnet. Specielle Folgerungen aus diesem Satze für besondere Lagen von P übergehen wir hier. —

Der Scalartheil eines Productes dreier Strecken hat eine einfache geometrische Bedeutung. Sind A, B, C drei Ecken eines sphärischen Dreiecks, so ist

$$-OB.OC = \cos CB + OA'.\sin CB$$

wenn wir obige Bezeichnung festhalten, also: $S(OA.OB.OC) = -S(OA.OA').\sin CB$; nun ist $-S(OA.OA') = \cos AA'$, also:

$$S(OA.OB.OC) = \cos AA'.\sin CB$$

Bezeichnet man den Durchschnitt des Kreises AA' mit BC, also den Fusspunkt eines von A auf BC gefüllten Perpendikels mit D, so ist $AA' = AD + DA'$, und bestimmt man den Sinn von AD so, dass $DA' = \frac{1}{2}\pi$, so ist $\cos AA' = -\sin AD$, also:

$$S(OA.OB.OC) = \sin AD.\sin BC = \sin(ABC)$$

nämlich dem sogenannten Sinus der Ecke gleich, mit dem man das Product der drei Kanten eines Parallelepipedum multipliciren muss, um sein Volumen zu finden.

§. 57.
Das sphärische Viereck.

Um die sphärische Tetragonometrie zu begründen, geht man von der Identität aus:

$$\frac{OA'}{OB'}\cdot\frac{OB'}{OC'} = \frac{OA'}{OD'}\cdot\frac{OD'}{OC'} \tag{1}$$

oder:

$$(\cos B'A' + OA.\sin B'A')(\cos C'B' + OB.\sin C'B') =$$
$$(\cos D'A' + OD.\sin D'A')(\cos C'D' + OC.\sin C'D')$$

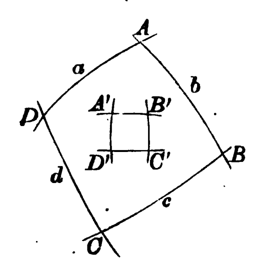


Fig. 36.

wenn A, B, C, D (Fig. 36) resp. die positiven Pole der Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ bezeichnen. Werden die Werthe:

$$-OA.OB = \cos BA + OB'.\sin BA$$
$$-OD.OC = \cos CD + OD'.\sin CD$$

in der Entwickelung von (1) substituirt, so gibt der Scalartheil ein triviales Resultat, der Vector aber:

$$OA \, . \sin B'A' \, . \cos C'B' + OB \, . \sin C'B' \, . \cos B'A' \\ - OB' \, . \sin B'A' \, . \sin C'B' \, . \sin BA =$$
$$OD \, . \sin D'A' \, . \cos C'D' + OC \, . \sin C'D' \, . \cos D'A' \\ - OD' \, . \sin D'A' \, . \sin C'D' \, . \sin CD.$$

Nennt man a, b, c, d die Polaren von A', B', C', D', so kann man alle Bogen $B'A'$, $C'B' \ldots$ durch Winkel $b\,a$, $c\,b \ldots$ ersetzen, und erhält so:

$$OA . \sin ba \cos cb + OB . \sin cb \cos ba - OB' . \sin ba \sin cb \sin BA =$$
$$OD . \sin da \cos cd + OC . \sin cd \cos da - OD' . \sin da \sin cd \sin CD$$

für ein beliebiges Viereck $ABCD$, dessen aufeinander folgende Seiten AB, BC, CD, DA jetzt b, c, d, a heissen und wo B', D' die Pole von b, d sind. Dividirt man diese Gleichung mit der beliebigen Einheitsstrecke OP, so gibt der Scalartheil:

$$0 = \cos AP . \sin ab . \cos bc + \cos BP . \sin bc . \cos ab \\ - \cos B'P . \sin ab . \sin bc . \sin AB \\ + \cos CP . \sin cd . \cos da + \cos DP . \sin da . \cos cd \\ - \cos D'P . \sin cd . \sin da . \sin CD$$

oder, wenn die Winkel $a\,b$, $b\,c$, $c\,d$, $d\,a$ nach ihren Ecken mit A, B, C, D bezeichnet werden:

$$0 = \cos AP . \sin A . \cos B + \cos BP . \sin B . \cos A \\ + \cos B'P . \sin A . \sin B . \sin AB \\ + \cos CP . \sin C . \cos D + \cos DP . \sin D . \cos C \\ + \cos D'P . \sin C . \sin D . \sin CD$$

wo man auch $\cos B'P = + \sin PQ$, $\cos D'P = + \sin PR$ schreiben mag, indem man mit PQ, PR die von P auf AB und CD gefällten Perpendikel bezeichnet. —

Ebenso wie die hier zu Grunde gelegte Formel (1) gibt jede Identität der Quaternionentheorie sogleich einen geometrischen Lehrsatz, wie man auch umgekehrt, bekannte geometrische Sätze benutzen wird, um identische Gleichungen zwischen Quaternionen zu entwickeln. Um nur ein Beispiel hievon zu geben, behandeln wir die Identität (17) des §. 43:

$$\mathrm{S}\,\{\mathrm{V}(a\,b) . \mathrm{V}(c\,d)\} = \mathrm{S}\,(a\,d)\,\mathrm{S}\,(b\,c) - \mathrm{S}\,(a\,c)\,\mathrm{S}\,(b\,d)$$

indem wir unter a, b, c, d die Radien einer Einheitskugel verstehen, welche letztere in A, B, C, D schneiden. Dann ist: $\mathrm{S}\,(a\,d) =$

$-\mathrm{S}\left(\frac{a}{d}\right) = -\cos DA$ u. s. f. ferner $\mathrm{V}(a\,b) = -\mathrm{V}\left(\frac{a}{b}\right) =$ $-OB'.\sin BA$, also $\mathrm{V}(a\,b).\mathrm{V}(c\,d) = OB'.OD' \sin BA \sin DC$, und $-\mathrm{S}(OB'.OD') = \cos B'D'$, wo B', D' die Pole von AB, CD sind, so dass $\cos(B'D') = \cos(AB,\ CD)$ gesetzt werden mag. Jene Identität giebt dann

$$\sin AB \sin CD \cos(AB, CD) = \cos AC \cos BD - \cos AD \cos BC$$

den bekannten Gauss'schen Satz.

§. 58.

Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme.

Es mag hier nur an einem Beispiele die Leichtigkeit dargethan werden, mit welcher der Quaternionencalcul analytisch-geometrische Sätze darzustellen erlaubt:

Erleidet eine um ihren Mittelpunkt drehbare Kugel irgendwelche Drehungen nach einander, so ist bekannt und übrigens auch aus den Sätzen des §. 50 leicht abzuleiten, dass das Resultat derselben in jedem Falle ersetzt werden kann durch eine Drehung um eine feste Axe.

Es sei s diese Axe, φ der Winkel, um den man drehen muss, wenn jenes Resultat erzielt werden soll, α eine Quaternion mit der Axe s und dem Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ also, wenn i_1, i_2, i_3 drei feste, aufeinander senkrechte Axen bedeuten:

$$s = i_1 \cos xs + i_2 \cos ys + i_3 \cos zs$$

$$\alpha = \cos\tfrac{1}{2}\varphi + s \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \cos\tfrac{1}{2}\varphi\,(1 + \lambda i_1 + \mu i_2 + \nu i_3),$$

wo

$$\lambda = \cos xs \tan\tfrac{1}{2}\varphi,\quad \mu = \cos ys \tan\tfrac{1}{2}\varphi,\quad \nu = \cos zs \tan\tfrac{1}{2}\varphi$$

gesetzt wird. Wenn man noch

$$\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = \varDelta = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,\quad \lambda i_1 + \mu i_2 + \nu i_3 = a$$

setzt, so hat man

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\varDelta}}(1 + a).$$

Irgend ein Vector:

$$u = x i_1 + y i_2 + z i_3$$

wird nun nach seiner Drehung um die Axe s und den Winkel φ, nach S. 169 die schliessliche Lage

$$u' = \alpha u \frac{1}{\alpha}$$

annehmen; nach (8) in §. 52 hat man, da $T\alpha = 1$ ist, $\frac{1}{\alpha} = K\alpha$, also:

$$u' = \alpha u K \alpha = \frac{1}{\varDelta}(1+a)\,u\,(1-a).$$

Die Entwickelung dieses Productes kann man ganz direct ausführen; sie wird aber wesentlich abgekürzt, wenn man auf

$$(1+a)\,u\,(1-a) = u + au - ua - aua$$

die Sätze des §. 43 anwendet. Es ist nämlich, da a, u Vectoren sind, nach (3) $au - ua = 2.V(au)$, ferner nach (6) $S(aua) = -S(aau) = -a^2 Su = 0$, da eben u ein Vector ist, endlich nach (9): $V(aua) = aS(ua) - uS(aa) + aS(au) = 2a\,S(au) - ua^2$, also:

$$(1+a)\,u\,(1-a) = u(1+a^2) + 2.V(au) - 2a\,S(au).$$

Nun ist

$$au = -(\lambda x + \mu y + \nu z) + (\lambda y - \mu x)\,i_3 + (\mu z - \nu y)\,i_1 + (\nu x - \lambda z)\,i_2,$$
$$1 + a^2 = 1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2$$

also:

$$\varDelta.u' = u(1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2) + 2(\lambda y - \mu x)\,i_3 + 2(\mu z - \nu y)\,i_1 + 2(\nu x - \lambda z)\,i_2 + 2a(\lambda x + \mu y + \nu z).$$

Setzt man nun den neuen Vector:

$$u' = x' i_1 + y' i_2 + z' i_3,$$

so findet man aus letzterer Entwickelung:

$$\varDelta.x' = x(1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2) + 2y(\lambda\mu - \nu) + 2z(\lambda\nu + \mu)$$
$$\varDelta.y' = 2x(\mu\lambda + \nu) + y(1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2) + 2z(\mu\nu - \lambda)$$
$$\varDelta.z' = 2x(\nu\lambda - \mu) + 2y(\nu\mu + \lambda) + z(1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2)$$

die berühmten Formeln EULER's *) für die Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme gegeneinander.

Historische Anmerkung zu Abschnitt VIII und IX. Bereits seit dem Jahre 1833 beschäftigte sich Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON (Prof. der Astronomie an der Universität Dublin und Royal Astronomer of Ireland, gest. den 2. Sept. 1865 zu Dunsink) angelegentlich mit der Theorie der höheren complexen Zahlen, in der Absicht, ein zur Behandlung der Geometrie des Raumes ebenso passendes Instrument zu erfinden, wie es die imaginären

*) Novi Comm. Petropolit. Bd. 20. S. 217, vergl. BALTZER's Determinanten 2. Aufl. S. 159, und CAYLEY, Phil. Mag. Febr. 1845. S. 141.

Zahlen für die Ebene sind, und in der Ueberzeugung, dass ein solches für den Raum noch nothwendiger und wichtiger sei, als für die Ebene. Eine interessante Geschichte seiner Bemühungen enthält die Vorrede zu den Lectures; sie lehrt, dass die hauptsächlichste Schwierigkeit darin lag, diejenigen Eigenschaften der Operationen zu finden, welche, wenn sie aufgehoben werden, das von mir so genannte Princip der Permanenz der formalen Gesetze der Arithmetik am wenigsten verletzen. Hamilton hielt anfangs die Commutativität der Multiplication für durchaus nothwendig, bis ihn vielfältige Versuche überzeugten, dass neben dieser die distributive Beziehung zu der von vornherein gegebenen Addition von Strecken nicht erhalten werden könne. So entschloss er sich endlich, zu Gunsten letzterer, die commutative Eigenschaft der Multiplication fallen zu lassen und wurde, nachdem er darauf verzichtet hatte, das Product und den Quotienten zweier Strecken wieder als Strecke ansehen zu können, im Jahre 1843 zu den Grundbegriffen des Quaternionencalculs geführt, die er zuerst in dem Meeting of Council der Irischen Akademie d. Wiss. vom 16. Oct. 1843, und dann in dem Phil. Magaz. Juli 1844 der gelehrten Welt vorlegte Von diesem Zeitpunkte an ist er unausgesetzt thätig gewesen, die fundamentale Theorie bis in ihre kleinsten Details zu entwickeln und zu vervollkommnen, sowie durch Anwendungen in's Besondere auf die Sphärik, Phoronomie, die Theorie der Polygone und Polyeder, welche Oberflächen zweiten Grades eingeschrieben sind, die Krümmungsverhältnisse von Flächen im Allgemeinen, die Theorie der geodätischen Linien, die Principien der Mechanik, das Problem der drei Körper, die Theorie der Wellenoberfläche u. s. f. die Fruchtbarkeit und Angemessenheit seiner Methode nachzuweisen. Die Theorie selbst hat er dann mit einigen Anwendungen derselben in den sehr umfangreichen „Lectures on Quaternions, containing a systematic statement of a new mathematical method, of which the principles were communicated in 1843 to the R. Irish Acad., and which has since formed the subject of successive courses of lectures, delivered in 1848 and subsequent years in the halls of Trinity College, Dublin; with numerous illustrative diagrams, and with some geometrical and physical applications". (Dublin, Hodges and Smith, 1853), in einer den continentalen Mathematikern sehr unbequemen, den Engländern aber, wie es scheint, durchaus natürlichen Weise dargestellt: Die Theorie ist aufgelöst in zerstreute Stücke, die Probleme werden nicht in ihrer Allgemeinheit, sondern zunächst in speciellen Fällen behandelt, dann unterbrochen durch Anwendungen und andere Untersuchungen, um erst später, zuweilen nur gelegentlich in ihrem ganzen Umfange erledigt zu werden. Dazu kommt eine durchgehends ausserordentlich breite, sich immer selbst repetirende Darstellung, die man wohl theilweise der Rücksicht zuschreiben muss, welche ihr Verfasser auf die Studirenden genommen hat; denn der Quaternionencalcul ist „sanctioned, as a subject of public and repeated examination in the (Dublin) university."

Wollte ich diese Theorie auf deutschen Boden verpflanzen, so war es nothwendig, die Darstellung total zu verändern Durch eine ganz andere

Anordnung, sofortige Lösung der Probleme im Zusammenhange, durch manche wesentliche Veränderung in den Beweisen, ist es mir gelungen, in den vorstehenden zwei Abschnitten alles Wesentliche der Theorie, abgesehen von einigen Anwendungen, darzustellen, welches sich bei HAMILTON von S. 1 bis etwa S. 545 findet. Namentlich hat die obige, nach meinem in diesem ganzen Werke durchgeführten Gesichtspunkte methodisch nothwendige Trennung der formalen Theorie der Quaternionen von dem Nachweise ihrer geometrischen Bedeutung, nicht allein, wie ich hoffe, zur Aufklärung über das Wesen und den eigentlichen Grund dieser neuen imaginären Einheiten, beigetragen, sondern auch eine viel grössere Kürze, als sie HAMILTON bei der Vermengung dieser beiden Gedankenkreise erreichen konnte, möglich gemacht.

Die nach Art der neueren englischen Mathematiker sehr ausgedehnte Terminologie habe ich allerdings so weit als möglich beschränkt und in die Anmerkungen verwiesen; ihre gänzliche, sehr wohl mögliche, Unterdrückung im Texte habe ich deshalb nicht für zweckmässig erachtet, weil sie nun einmal von HAMILTON und seinen Schülern angewandt wird, und ich viel Gewicht darauf lege, durch meine Behandlung das Studium der Abhandlungen jener Gelehrten zu erleichtern.

Erst nachdem meine Ausarbeitung vollendet war, kamen mir die den „Lectures" an Umfang gleichen „Elements of Quaternions" (London, Longmans, Green et Co. 1866), ein posthumes Werk desselben Verfassers, von seinem Sohne W. E. HAMILTON herausgegeben, zu Handen. Zu diesem neuen Werke, welches sich in der Theorie nicht wesentlich von dem früheren unterscheidet, scheint sein Verfasser durch das sich auch bei ihm geltend machende Bedürfniss eines einheitlichen Zusammenfassens der verschiedenen Aufgaben, welche zu einer Feststellung des Quaternionencalculs führen, sowie die Absicht veranlasst worden zu sein, einen grossen Theil der neuen Anwendungen dieses Calculs in Einem Werke darzustellen. Im vorstehenden ist der wesentliche Inhalt der 390 ersten Seiten dieser Elements, allerdings mit Weglassung mancher schönen Anwendungen (besonders der Theorie der geometrischen Netze) gegeben. Es ist kein Zweifel, dass dies neue Werk das ältere vollkommen überflüssig gemacht hat — und es bleibt mir nur noch übrig, den Wunsch auszusprechen, dass meine Bearbeitung im Stande sein möge, die Quaternionen-Theorie, das Product eines durch glänzende Entdeckungen berühmten, genialen Mathematikers, die auf dem Continente bisher, so viel ich weiss, nur in ALLÉGRET's „Essai sur le calcul des quaternions" (Paris 1862) eine allerdings unzureichende Darstellung gefunden hat, auch in Deutschland heimisch zu machen. „Das beste Denkmal, welches man einem grossen Manne setzen kann, ist das fortgesetzte Studium seiner Werke."

LEIPZIG, DRUCK VON GIESECKE & DEVRIENT.